МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА

ОБНОВЛЕНО
для набора 2019 г.
Зам. директора по УР
________ О.А. Улитина
16 04. 2020г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

программы подготовки специалистов среднего звена

38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Форма обучения: Очная

Уссурийск 2020

Рабочая программа учебной дисциплины разработана в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), утвержденного приказом Министерства образования и науки Р.Ф. от 05.02.2018 г. N 69.

Разработчик: Онохова Н.Б. преподаватель филиала ФГБОУ ВО «ВГУЭС» в г. Уссурийске

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии экономических, математических, общих естественнонаучных и правовых дисциплин
Протокол № 8 от «16» 04.2020 г.
Председатель ЦМК __________ Басалюк Т.Г.

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии
Протокол № 8 от «16» 04. 2020 г.
Председатель ЦМК __________ Т.Г. Басалюк
подпись

Содержание

1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Учебная дисциплина «Математика» является частью естественнонаучного учебного цикла основной образовательной программы (далее ООП) в соответствии с ФГОС СПО по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

1.2. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

По итогам освоения дисциплины, обучающиеся должны продемонстрировать результаты обучения, соотнесённые с результатами освоения ООП СПО, приведенные в таблице.

Код ПК, ОК	Умения	Знания
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам	**Умения:** решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	**Знания:** основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности
ОК 02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности	**Умения:** быстрота и точность поиска, оптимальность и научность необходимой информации, а также обоснованность выбора применения современных технологий её обработки	**Знания:** основных понятий и методов теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа
ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.	**Умения:** организовывать самостоятельную работу при освоении профессиональных компетенций; стремиться к самообразованию и повышению профессионального уровня	**Знания:** значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ
ОК 04 Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.	**Умения:** умело и эффективно работать в коллективе, соблюдать профессиональную этику	**Знания:** математических понятий и определений, способов доказательства математическими методами
ОК 09 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности	**Умения:** умение рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности	**Знания:** знание математического анализа информации, представленной различными способами, а также методов построения графиков различных процессов

2 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	**Объем часов**
Объем образовательной программы учебной дисциплины	72
в том числе:	
теоретическое обучение	33
практические занятия	33
самостоятельная работа	3
консультация	3
Промежуточная аттестация	Дифференцированный зачёт

2.2 Тематический план и содержание учебной дисциплины

.Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала и формы организации деятельности обучающихся	Объем в часах	Коды компетенций, формированию которых способствует элемент программы
1	**2**	**3**	**4**
Раздел 1. Основные понятия комплексных чисел		**4**	
Тема 1.1. Комплексные числа и действия над ними	**Содержание учебного материала**		ОК 01, ОК 02
	1.Определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа. Решение алгебраических уравнение.	2	
	Лабораторные занятия	не предусмотрены	
	Практические занятия		
	№1 «Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексного числа».	2	
	Контрольные работы	не предусмотрены	
	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Раздел 2 Элементы линейной алгебры		**26**	
Тема 2.1 Матрицы и определители	**Содержание учебного материала**	**8**	ОК 02
	1. Экономико-математические методы.	2	
	2. Матричные модели. Матрицы и действия над ними. Определитель матрицы.	2	
	Лабораторные занятия	не предусмотрены	

	Практические занятия		
	№2 «Действия над матрицами».	2	
	№3 «Определители второго и третьего порядков».	2	
	Контрольные работы	не предусмотрены	
	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Тема 2.2. Методы решения систем линейных уравнений	**Содержание учебного материала**	**12**	ОК 03, ОК 04
	1. Метод Гаусса.	2	
	2. Правило Крамера.	2	
	3. Метод обратной матрицы.	2	
	Лабораторные занятия	не предусмотрены	
	Практические занятия		
	№ 4 «Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)».	2	
	№ 5 «Формулы Крамера (для систем линейных уравнений с тремя неизвестными)».	2	
	№ 6 «Решение матричных уравнений».	2	
	Контрольные работы	не предусмотрены	
	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Тема 2.3. Моделирование и решение задач линейного программирования	**Содержание учебного материала**	**6**	ОК 09
	1. Математические модели. Задачи на практическое применение математических моделей.	2	
	2. Общая задача линейного программирования. Матричная форма записи.	2	

	Лабораторные занятия	не предусмотрены	
	Практические занятия		
	№ 7 «Графический метод решения задачи линейного программирования».	2	
	№ 8 «Графический метод решения задачи линейного программирования».	2	
	№ 9 «Графический метод решения задачи линейного программирования».	1	
	Контрольные работы	не предусмотрены	
	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Раздел 3 Введение в анализ		**5**	
Тема 3.1 Функции многих переменных	**Содержание учебного материала**	**1**	ОК 09
	1. Функции двух и нескольких переменных, способы задания, символика, область определения. Бесконечно малые функции. Метод эквивалентных бесконечно малых величин. Непрерывность функции.	1	
Тема 3.2 Пределы и непрерывность	**Содержание учебного материала**	**4**	ОК 04
	1. Предел функции. Раскрытие неопределённости вида 0/0 и ∞/∞. Замечательные пределы.	2	
	Лабораторные занятия	не предусмотрены	
	Практические занятия		
	№ 10 «Вычисление пределов функции: раскрытие неопределённости, использование замечательных пределов»	2	
	Контрольные работы	не предусмотрены	

	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Раздел 4 Дифференциальные исчисления		**7**	
Тема 4.1 Производная и дифференциал	**Содержание учебного материала**	**7**	ОК 02, ОК 03
	1. Производная функции. Первый дифференциал функции, связь с приращением функции. Основные правила дифференцирования. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций.	2	
	2. Производные и дифференциалы высших порядков. Полный дифференциал. Частные производные высших порядков.	2	
	Лабораторные занятия	не предусмотрены	
	Практические занятия		
	№ 11 «Экстремум функции нескольких переменных».	2	
	Контрольные работы	не предусмотрены	
	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Раздел 5. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения		**26**	
Тема 5.1 Неопределённый интеграл	**Содержание учебного материала**	**7**	ОК 03
	1. Первообразная функция и неопределённый интеграл. Основные правила неопределённого интегрирования.	2	
	Лабораторные занятия	не предусмотрены	
	Практические занятия		
	№ 12 «Методы замены переменной и интегрирования по частям».	2	
	Контрольные работы	не предусмотрены	

	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Тема 5.2 Определённый интеграл	**Содержание учебного материала**	**3**	ОК 01
	1. Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определённого интеграла. Задача нахождения площади криволинейной трапеции.	2	
	Лабораторные занятия	не предусмотрены	
	Практические занятия		
	№ 13 «Вычисление определенного интеграла методом замены переменной».	2	
	Контрольные работы	не предусмотрены	
	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Тема 5.3 Несобственный интеграл	**Содержание учебного материала**	**7**	ОК 01
	1. Интегрирование неограниченных функций. Интегрирование по бесконечному промежутку.	2	
	Лабораторные занятия	не предусмотрены	
	Практические занятия		
	№ 14 «Вычисление несобственных интегралов. Исследование сходимости (расходимости) интегралов. Приложения интегрального исчисления».	2	
	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Тема 5.4 Дифференциальные уравнения	**Содержание учебного материала**	**9**	ОК 02, ОК 04
	1. Основные понятия и определения. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.	2	

	Лабораторные занятия	не предусмотрены	
	Практические занятия		
	№ 15 «Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени».	2	
	№ 16 «Уравнения с разделяющимися переменными. Однородное дифференциальное уравнение».	2	
	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрены	
Консультация		**3**	
Промежуточная аттестация (Дифференцированный зачёт)		**-**	ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 09
Всего:		**72**	

3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1 Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Учебная аудитория для проведения учебных занятий (урок, практическое занятие, лабораторное занятие, лекция, семинар), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации:

Кабинет Математики.

количество посадочных мест - 46 шт., стол для преподавателя 1 шт., стул для преподавателя 1 шт., мультимедийное оборудование 1 шт., доска меловая, стеллаж, дидактические пособия

ПО: Microsoft Windows 7 Professional Russian, ООО "Битроникс Владивосток" Контракт№ 0320100030814000018-45081 от 09.09.14, лицензия №64099496, бессрочно

3.2 Информационное обеспечение реализации программы

Для реализации программы учебной дисциплины библиотечный фонд ВГУЭС укомплектован печатными и электронными изданиями.

Обучающиеся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены печатными и (или) электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.

Основная литература

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. И доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/449006
2. Попов, А. М. Математика для экономистов : учебник для среднего профессионального образования / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под редакцией А. М. Попова. — 2-е изд., перераб. И доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 566 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10640-4. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/466309

Дополнительная литература

1. Теория вероятностей : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 203 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/teoriya-veroyatnostey-451178#page/1
2. Гисин, В. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. Б. Гисин. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 383 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11633-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/457136

Интернет-ресурсы:

1 www. fcior. edu. ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).

www. school-collection. edu. ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).

4 КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Контроль и оценка результатов освоения дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения практических занятий и контрольных работ, тестирования, а также выполнения обучающимися индивидуальных заданий, проектов, исследований.

Результаты обучения	Критерии оценки	Методы оценки
знание основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности	1) знает определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними; 2) знает, как геометрически изобразить комплексное число; 3) знает, что представляет собой модуль и аргумент комплексного числа; 4) знает, как найти площадь криволинейной трапеции; 5) знает, что называется определённым интегралом; 6) знает формулу Ньютона-Лейбница; 7) знает основные свойства определённого интеграла; 8) знает правила замены переменной и интегрирование по частям; 9) знает, как интегрировать неограниченные функции; 10) знает, как интегрировать по бесконечному промежутку; 11) знает, как вычислять несобственные интегралы; 12) знает, как исследовать сходимость (расходимость) интегралов;	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов выполнения домашних заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.
знание основных понятий и методов теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа	1) знает определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними; 2) знает, как геометрически изобразить комплексное число; 3) знает, что представляет собой модуль и аргумент комплексного числа; 4) знает экономико-математические методы; 5) знает, что представляют	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов выполнения домашних

	собой матричные модели; 6) знает определение матрицы и действия над ними; 7) знает, что представляет собой определитель матрицы; 8) знает, что такое определитель второго и третьего порядка; 9) знает задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям; 10) знает основные понятия и определения дифференциальных уравнений;	заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.
значения математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ	1) знает метод Гаусса, правило Крамера и метод обратной матрицы; 2) знает, что представляет собой первообразная функция и неопределённый интеграл; 3) знает основные правила неопределённого интегрирования; 4) знает, как находить неопределённый интеграл с помощью таблиц, а также используя его свойства; 5) знает в чём заключается метод замены переменной и интегрирования по частям; 6) знает, как интегрировать простейшие рациональные дроби;	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов выполнения домашних заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.
знание математических понятий и определений, способов доказательства математическими методами	1) знает метод Гаусса, правило Крамера и метод обратной матрицы; 2) знает задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям; 3) знает основные понятия и определения дифференциальных уравнений; 4) знает определение предела функции; 5) знает определение бесконечно малых функций; 6) знает метод эквивалентных бесконечно малых величин; 7) знает, как раскрывать неопределённость вида 0/0 и ∞/∞; 8) знает замечательные	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов выполнения домашних заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.

	пределы; 9) знает определение непрерывности функции;	
знание математического анализа информации, представленной различными способами, а также методов построения графиков различных процессов	1) знает, что представляет собой математическая модель; 2) знает как практически применять математические модели при решении различных задач; 3) знает общую задачу линейного программирования; 4) знает матричную форму записи; 5) знает графический метод решения задачи линейного программирования; 6) знает, как интегрировать неограниченные функции; 7) знает, как интегрировать по бесконечному промежутку; 8) знает, как вычислять несобственные интегралы; 9) знает, как исследовать сходимость (расходимость) интегралов; 10) знает, как задавать функции двух и нескольких переменных, символику, область определения;	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов выполнения домашних заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.
Перечень умений, осваиваемых в рамках дисциплины		
умение решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	1) умение решать алгебраические уравнения с комплексными числами; 2) умение решать задачи с комплексными числами; 3) умение геометрически интерпретировать комплексное число; 4) умение находить площадь криволинейной трапеции; 5) умение находить определённый интеграл используя основные свойства, правила замены переменной и интегрирования по частям; 6) умение вычислять несобственные интегралы; 7) умение исследовать сходимость (расходимость) интегралов;	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов выполнения домашних заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.

быстрота и точность поиска, оптимальность и научность необходимой информации, а также обоснованность выбора применения современных технологий её обработки	1) умение решать алгебраические уравнения с комплексными числами; 2) умение решать задачи с комплексными числами; 3) умение геометрически интерпретировать комплексное число; 4) умение составлять матрицы и выполнять действия над ними; 5) умение вычислять определитель матрицы; 6) умение решать задачи при помощи дифференциальных уравнений; 7) умение решать дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени; 8) умение решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными; 9) умение решать однородные дифференциальные уравнения;	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов выполнения домашних заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.
организовывать самостоятельную работу при освоении профессиональных компетенций; стремиться к самообразованию и повышению профессионального уровня	1) умение решать системы линейных уравнений методом Гаусса, правилом Крамера и методом обратной матрицы; 2) умение находить неопределённый интеграл с помощью таблиц, а также используя его свойства; 3) умение вычислять неопределённый интеграл методом замены переменной и интегрирования по частям; 4) умение интегрировать простейшие рациональные дроби;	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов выполнения домашних заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.
умело и эффективно работает в коллективе, соблюдает профессиональную этику	1) умение решать системы линейных уравнений методом Гаусса, правилом Крамера и методом обратной матрицы; 2) умение решать задачи при помощи дифференциальных уравнений; 3) умение решать дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени;	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов

	4) умение решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными; 5) умение решать однородные дифференциальные уравнения;	выполнения домашних заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.
умение рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности	1) знает, что представляет собой математическая модель; 2) знает, как практически применять математические модели при решении различных задач; 3) знает общую задачу линейного программирования; 4) знает матричную форму записи; 5) знает графический метод решения задачи линейного программирования; 6) умение вычислять несобственные интегралы; умение исследовать сходимость (расходимость) интегралов;	Оценка результатов выполнения практических работ. Оценка результатов устного и письменного опроса. Оценка результатов тестирования. Оценка результатов самостоятельной работы. Оценка результатов выполнения домашних заданий. Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта.

Для оценки достижения запланированных результатов обучения по дисциплине разработаны контрольно-оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, которые прилагаются к рабочей программе дисциплины.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА

КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
по учебной дисциплине
ЕН.01 МАТЕМАТИКА
программы подготовки специалистов среднего звена
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Форма обучения: *очная*

Уссурийск, 2020

Контрольно-оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по учебной дисциплине разработаны в соответствии с требованиями ФГОС СПО по специальности *38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)*, утвержденного приказом Минобрнауки РФ от 5 февраля 2018 г. N 69, примерной образовательной программой, рабочей программой учебной дисциплины.

Разработчик(и): *Н.Б. Онохова, преподаватель*

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии

Протокол № 8 от «16» 04 20 20 г.

Председатель ЦМК ______________ *Т.Г. Басалюк*

подпись

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии

Протокол № 8 от «16» 04 20 20 г.

Председатель ЦМК ______________ *И.О. Фамилия*

подпись

1 Общие сведения

Контрольно-оценочные средства (далее – КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины *ЕН.01 Математика.*

КОС включают в себя контрольные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине, которая проводится в форме дифференцированного зачёта (с использованием оценочного средства - *устный опрос в форме ответов на вопросы билетов, устный опрос в форме собеседования, выполнение письменных заданий, тестирование и т.д.*)

2 Планируемые результаты обучения по дисциплине, обеспечивающие результаты освоения образовательной программы

Код ОК	Код результата обучения	Наименование результата обучения
ОК 01	З1	**Знания:** основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности
ОК 02	З2	**Знания:** основных понятий и методов теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа
ОК 03	З3	**Знания:** значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ
ОК 04	З4	**Знания:** математических понятий и определений, способов доказательства математическими методами
ОК 09	З5	**Знания:** знание математического анализа информации, представленной различными способами, а также методов построения графиков различных процессов
ОК 01	У1	**Умения:** решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности
ОК 02	У2	**Умения:** быстрота и точность поиска, оптимальность и научность необходимой информации, а также обоснованность выбора применения современных технологий её обработки
ОК 03	У3	**Умения:** организовывать самостоятельную работу при освоении профессиональных компетенций; стремиться к самообразованию и повышению профессионального уровня
ОК 04	У4	**Умения:** умело и эффективно работать в коллективе, соблюдать профессиональную этику
ОК 09	У5	**Умения:** умение рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности

3 Соответствие оценочных средств контролируемым результатам обучения

3.1 Средства, применяемые для оценки уровня теоретической подготовки

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в КОС	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
Раздел 1. Основные понятия комплексных чисел				
Тема 1.1. Комплексные числа и действия над ними	З2	Знать определение комплексного числа, противоположного, сопряженного комплексного числа, мнимая единица	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону).	Вопросы на диф. зачёт
	З2	Знать понятие модуля и аргумента комплексного числа;	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону).	Вопросы на диф. зачёт
	З4	Знать понятие тригонометрическая форма комплексного числа, действия над комплексными числами в тригонометрической форме	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону).	Вопросы на диф. зачёт
Раздел 2. Элементы линейной алгебры				
Тема 2.1. Матрицы и определители	З4	Понятия определителей системы; матрицы, свойства матриц, действия над матрицами	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
Тема 2.2. Методы решения систем линейных уравнений	З3	Перечисление последовательности действий при решении систем линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера, методом Гаусса	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка	Вопросы на диф. зачёт

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в КОС	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
			по эталону	
Тема 2.3. Моделирование и решение задач линейного программирования	31	Математические свойства моделей и методы решения задач линейного программирования	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
Раздел 3. Введение в анализ				
Тема 3.1. Функции многих переменных	35	Способы задания функции многих переменных	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	35	Область определения	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	34	Экстремум функции нескольких переменных	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
Тема 3.2. Пределы и непрерывность	35	Вычисление предела числовой последовательности	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка	Вопросы на диф. зачёт

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в КОС	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
			по эталону	
	35	Вычисление предела монотонной ограниченной последовательности	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	34	Основные теоремы о пределах	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
Раздел 4. Дифференциальные исчисления				
Тема 4.1. Производная и дифференциал	35	Задачи, приводящие к понятию производной. Производная суммы, разности, произведения, частного функций. Нахождение производных элементарных функций. Формулировка геометрического и механического смысла производной.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	35	Формулировка правил дифференцирования и перечисление производных основных элементарных функций.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	34	Производная сложной и обратной функций	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка	Вопросы на диф. зачёт

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в КОС	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
			по эталону	
	35	Правила дифференцирования. Дифференцирование сложных функции.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	35	Классификация точек разрыва. Исследование функций на экстремум.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	34	Исследование функций на выпуклость и вогнутость, перегиб функции.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	35	Определение производной и ее физический и геометрический смысл	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
Раздел 5. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения				
Тема 5.1. Неопределённый интеграл	35	Понятие первообразной функции. Неопределённый интеграл, его свойства. Формулы интегрирования.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка	Вопросы на диф. зачёт

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в КОС	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
			по эталону	
	З4	Методы нахождения неопределённого интеграла.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
Тема 5.2. Определённый интеграл	З5	Определённый интеграл, его свойства, таблица простейших интегралов. Формула Ньютона – Лейбница.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	З5	Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	З4	Вычисление объёмов тел вращения с помощью определённого интеграла, давления.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
Тема 5.3. Несобственный интеграл	З5	Правила вычисления несобственных интегралов.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в КОС	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
	З5	Понятия сходящихся и расходящихся несобственных интегралов.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
Тема 5.4. Дифференциальные уравнения	З4	- Алгоритм решения линейных дифференциальных уравнения первого порядка.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт
	З5	Решение задач на составление дифференциальных уравнений.	Устный фронтальный контроль. Конспект (письменно) оценочного задания (самопроверка по эталону	Вопросы на диф. зачёт

3.2 Средства, применяемые для оценки уровня практической подготовки

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в КОС	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
Раздел 1. Основные понятия комплексных чисел				
Тема 1.1 Практическая работа № 1	У1-5	Решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.	*Отчет по практической работа №1*	*Практическая часть к диф. зачёту*
	У1-5	Производить действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.	*Отчет по практической работа №1*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Раздел 2. Элементы линейной алгебры				
Тема 2.1 Практическа	У1-5	Выполнять действия над матрицами.	*Отчет по практической*	*Практическая часть к диф.*

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в КОС	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
я работа № 2			*работа №2*	*зачёту*
Тема 2.1 Практическая работа № 3	У1-5	Вычислять определители.	*Отчет по практической работа №3*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Тема 2.2 Практическая работа № 4	У1-5	Решать системы линейных уравнений методом обратной матрицы	*Отчет по практической работа №4*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Тема 2.2 Практическая работа № 5	У1-5	Решать системы линейных уравнений по формулам Крамера	*Отчет по практической работа №5*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Тема 2.2 Практическая работа № 6	У1-5	Решать системы линейных уравнений методом Гаусса	*Отчет по практической работа №6*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Тема 2.3 Практическая работа № 7	У1-5	Решать задачи методами линейного программирования	*Отчет по практической работа №7*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Тема 2.3 Практическая работа № 8	У1-5	Решать задачи методами линейного программирования	*Отчет по практической работа №8*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Тема 2.3 Практическая работа № 9	У1-5	Решать задачи методами линейного программирования	*Отчет по практической работа №9*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Раздел 3 Введение в анализ				
Тема 3.2 Практическая работа № 10	У1-5	Вычислять предел функции в точке и в бесконечности.	*Отчет по практической работа №10*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Раздел 4 Дифференциальные исчисления				
Тема 4.1 Практическая работа № 11	У1-5	Вычислять производные элементарных функций, сложных функций. Анализировать сложные функции и строить их графики	*Отчет по практической работа №11*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Раздел 5. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения				
Тема 5.1 Практическая работа № 12	У1-5	Вычислять неопределённый интеграл методом замены переменной и интегрирования по частям.	*Отчет по практической работа №12*	*Практическая часть к диф. зачёту*

Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины	Код результата обучения	Показатель овладения результатами обучения	Наименование оценочного средства и представление его в КОС	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
Тема 5.2 Практическая работа № 13	У1-5	Вычислять определённый интеграл по формуле Ньютона- Лейбница. Вычислять площади плоских фигур, объёмы и давление с помощью интеграла.	*Отчет по практической работа №13*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Тема 5.3 Практическая работа № 14	У1-5	*Вычислять несобственные интегралы*	*Отчет по практической работа №14*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Тема 5.4 Практическая работа № 15	У1-5	*Решать дифференциальные уравнения первого порядка*	*Отчет по практической работа №15*	*Практическая часть к диф. зачёту*
Тема 5.4 Практическая работа № 16	У1-5	*Решать задачи на составление дифференциальных уравнений.*	*Отчет по практической работа №16*	*Практическая часть к диф. зачёту*

4 Описание процедуры оценивания

Результаты обучения по дисциплине, уровень сформированности компетенций оцениваются по четырёх бальной шкале оценками: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» (*по бальной системе. Максимальная сумма баллов по дисциплине равна ___ баллам.)*.

Текущая аттестация по дисциплине проводится с целью систематической проверки достижений обучающихся. Объектами оценивания являются: степень усвоения теоретических знаний, уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы, качество выполнения самостоятельной работы, учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине).

При проведении промежуточной аттестации оценивается достижение студентом запланированных по дисциплине результатов обучения, обеспечивающих результаты освоения образовательной программы в целом. *Оценка на зачете / экзамене выставляется с учетом оценок, полученных при прохождении текущей аттестации.*

Критерии оценивания устного ответа

5 баллов - ответ показывает прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа; умение приводить примеры современных проблем изучаемой области.

4 балла - ответ, обнаруживающий прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается одна - две неточности в ответе.

3 балла – ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой предметной области, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы; знанием основных вопросов теории; слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры; недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа; неумение привести пример развития ситуации, провести связь с другими аспектами изучаемой области.

2 балла – ответ, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы; незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа явлений, процессов; неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Допускаются серьезные ошибки в содержании ответа; незнание современной проблематики изучаемой области.

Критерии оценивания письменной работы

(оценочные средства: *реферат, эссе, конспект, контрольная работа, расчетно-графическая работа, письменный отчет по лабораторной работе, портфолио, доклад (сообщение), в том числе выполненный в форме презентации, творческое задание, курсовая работа.*).

5 баллов - студент выразил своё мнение по сформулированной проблеме, аргументировал его, точно определив ее содержание и составляющие. Проблема раскрыта полностью, выводы обоснованы. Приведены данные отечественной и зарубежной литературы, статистические сведения, информация нормативно-правового характера. Студент владеет навыком самостоятельной работы по заданной теме; методами и приемами анализа теоретических и/или практических аспектов изучаемой области. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет; графически работа оформлена правильно.

4 балла - работа характеризуется смысловой цельностью, связностью и последовательностью изложения; допущено не более 1 ошибки при объяснении смысла или содержания проблемы. Проблема раскрыта. Не все выводы сделаны и/или обоснованы. Для аргументации приводятся данные отечественных и зарубежных авторов. Продемонстрированы исследовательские умения и навыки. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет. Допущены одна-две ошибки в оформлении работы.

3 балла – студент проводит достаточно самостоятельный анализ основных этапов и смысловых составляющих проблемы; понимает базовые основы и теоретическое обоснование выбранной темы. Проблема раскрыта не полностью. Выводы не сделаны и/или выводы не обоснованы Проведен анализ проблемы без привлечения дополнительной литературы. Допущено не более 2 ошибок в смысле или содержании проблемы, оформлении работы.

2 балла - работа представляет собой пересказанный или полностью переписанный исходный текст без каких бы то ни было комментариев, анализа. Не раскрыта структура и теоретическая составляющая темы. Проблема не раскрыта. Выводы отсутствуют. Допущено три или более трех ошибок в смысловом содержании раскрываемой проблемы, в оформлении работы.

Критерии оценивания тестового задания

Оценка	*Отлично*	*Хорошо*	*Удовлетворительно*	*Неудовлетворительно*
Количество правильных ответов	91 % и ≥	от 81% до 90,9 %	не менее 70%	менее 70%

Критерии выставления оценки студенту на зачете/ экзамене

(оценочные средства: *устный опрос в форме ответов на вопросы билетов, устный опрос в форме собеседования, выполнение письменных разноуровневых задач и заданий, комплексная расчетно-графическая работа, творческое задание, кейс-задача, портфолио, проект и т.п.)*

Оценка по промежуточной аттестации	Характеристика качества сформированности компетенций
«зачтено» / «отлично»	Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на продвинутом уровне: обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.
«зачтено» / «хорошо»	Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на базовом уровне: основные знания, умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.
«зачтено» / «удовлетворительно»	Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на пороговом уровне: имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, в ходе контрольных мероприятий допускаются значительные ошибки, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ, при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.
«не зачтено» / «неудовлетворительно»	Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на уровне ниже порогового: выявляется полное или практически полное отсутствие знаний значительной части программного материала, студент допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, умения и навыки не сформированы.

5. Примеры оценочных средств для проведения текущей аттестации

Тема 1.1. «Комплексные числа и действия над ними».

Устный фронтальный контроль

1) Пользуясь конспектом лекции и рекомендуемой литературой ответить на вопросы:

- Что такое мнимая единица? Как вычисляют степени мнимой единицы? (пример).
- Какое число называется комплексным?
- Какие комплексные числа называются чисто мнимыми, равными, сопряженными?
- Как геометрически изображаются комплексные числа?
- Как записывается комплексное число в алгебраической форме?
- Как выполняются сложение , вычитание ,умножение комплексных чисел в алгебраической форме? (пример).
- Как выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме?(пример)
- Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулы для модуля и аргумента комплексного числа.
- Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
- Как записывается комплексное число в показательной форме?
- Как выполнить переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической? к показательной?
- Как выполнить переход от тригонометрической формы комплексного числа к алгебраической? От показательной ? Выполнить конспект вопроса «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме».

2) Выполнить конспект вопроса «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме».

Оценочное задание

<u>Вариант 1</u>
1. Вычислить

2 Выполнить действия в алгебраической форме записи:

а) $\frac{1 \quad 4i}{3i \quad 1}$; б) $(4 \quad i)(2 \quad 2i)$; в) $\frac{6 \quad 2i}{6 \quad 2i}$

3 Записать комплексное число в тригонометрической форме:

а) б) в)

4 Записать комплексное число в показательной форме:

б) в)

5 Записать комплексное число алгебраической в форме:

а)) б)

Вариант 2

1. Вычислить

2. Выполнить действия в алгебраической форме записи:

а) $\frac{2 \quad 3i}{4 \quad 5i}$; б) $(5 \quad 4i)(3 \quad 2i)$; в) $(3 \quad 5i)(6 \quad 3i)$

3. Записать комплексное число в тригонометрической форме:

б) в)

4. Записать комплексное число в показательной форме:

б) в)

5. Записать комплексное число алгебраической в форме:

а)) б)

Оценочное индивидуальное задание
Практическая работа № 1.

«Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексного числа»

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

знать:

- основы теории комплексных чисел.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называется выражение вида:

$$z = a + bi \qquad (1)$$

где a и b – действительные числа, а i - некоторый символ, называемый *мнимой единицей* и $i^2 = -1$, т.е. $i = \sqrt{-1}$.

В формуле (1) a называется ***действительной частью***, а b - **мнимой частью** комплексного числа z и обозначается:

$$a = \operatorname{Re} z\,,\ b = \operatorname{Im} z\,.$$

Так, выражения $2+3i$, $2 -4i$, $-1 -3i$, $5i$, 2 являются примерами комплексных чисел. Множество комплексных чисел обозначается буквой *С*.

Операции над комплексными числами

Равенство двух чисел. Комплексные числа $z_1 = \alpha + bi$ и $z_2 = c + di$ называются ***равными*** только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Сложение. Суммой комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число:

$$z = z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \qquad (2)$$

Сложение комплексных чисел обладает свойствами:

1) коммутативности

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{или} \qquad (a + bi) + (c + d)i = (c + di) + (a + bi)$$

2) ассоциативности

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{или} \quad ((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) = (a + bi) + ((c + di) + (e + fi)).$$

Вычитание. Разностью комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется число

$$z = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i. \qquad (3)$$

Операция нахождения разности $z = z_1 - z_2$ называется ***вычитанием,*** причём z_1 называется ***уменьшаемым***, z_2 - ***вычитаемым.***

Умножение. Произведением комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \qquad (4)$$

Умножение комплексных чисел обладает свойствами:

1) коммутативности

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad \text{или} \quad (a + bi)(c + di) = (c + di)(a + bi);$$

2) ассоциативности

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \quad \text{или} \quad ((a + bi)(c + di))(e + fi) = (a + bi)((c + di)(e + fi));$$

Операции над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, выполняются таким же образом, как и над обычными многочленами, с последующей заменой i^2 на –1. Комплексное число $0 + 0i = 0$ называется ***нулевым комплексным числом*** или просто ***нулём.*** Легко проверить, что для любого комплексного числа z имеет место $z + 0 = z$ и $z \cdot 0 = 0$. Пусть дано комплексное число $z = a + bi$, тогда число $-z = -a - bi$ называется ***противоположным*** числу $z = a + bi$. Легко проверить, что $z + (-z) = 0$ и $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Деление. Частным комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di \neq 0$ называется комплексное число: $$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i \qquad (5)$$

Операция нахождения частного $z = z_1 \div z_2$ называется ***делением,*** причём z_1 называется ***делимым,*** z_2 - ***делителем.***

Если $z = a + bi$, то число $\bar{z} = a - bi$ называется ***сопряжённым*** числу z. В частности, действительное число $a = a + 0i$ сопряжено самому себе, так как $\bar{a} = a - 0i = a.$ Например, если $z_1 = 2+3i,\quad z_2 = -3-4i,\quad z_3 = 2i,\quad z_4 = -3,$ то $\bar{z}_1 = 2-3i,\quad \bar{z}_2 = -3+4i,\quad \bar{z}_3 = -2i, \bar{z}_4 = -3$
Заметим, что:

$$z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a,$$
$$z_1\bar{z}_2 = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

Так, если $z = 4+5i$, то:

$$z + \bar{z} = (4+5i) + (4-5i) = 8, \quad z\bar{z} = (4+5i)(4-5i) = 4^2 - (5i)^2 = 16 + 25 = 41.$$

Заметим, что формула (5) может быть получена так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-(di)^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i \quad ,$$

т.е чтобы найти $\frac{z_1}{z_2}$, надо ***домножить*** числитель и знаменатель данной дроби на $\bar{z}_2$ и произвести умножение с учётом, что $i^2 = -1$.

Число $\frac{1}{z},\quad z \neq 0,$ обозначается через z^{-1} и называется ***обратным*** числу z. Легко проверить, что $zz^{-1} = 1$ и $z_1 \div z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}$. Таким образом, разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2 - это означает умножить z_1 на число $z_2{}^{-1}$, обратное числу z_2.

Возведение в степень. ***Возведение в степень*** комплексных чисел определим аналогично действительным числам:

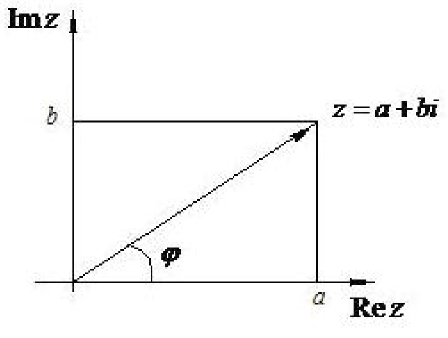
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз}, \quad \text{где } n \text{ - целое} \qquad (6)$$

Для $n = 0$ и целого $n > 0$ определяем соответственно $z^0 = 1$ и $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ (7)

Легко проверить, что для любых целых m и n имеют место равенства:

$$z^n z^m = z^{n+m}; \quad (z^n)^m = z^{nm}; \quad \frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}; \quad (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n. \qquad (8)$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел.



Пусть $z = a + bi$. Заметим, что каждое комплексное число однозначно определяется парой чисел *(a ; b),* которые являются его действительной и мнимой частью. С другой стороны нам известно, что при введении декартовой системы координат на плоскости $X0Y$ положение любой её точки также однозначно определяются парой чисел $(x; y)$, которые называются координатами точки. Установив это взаимооднозначное соответствие, можно изображать комплексные числа на плоскости, которую назвали комплексной плоскостью C. В ней вместо оси OX – ось $\operatorname{Re} z$, а вместо оси OY - ось $\operatorname{Im} z$. Любое комплексное число $z = a + bi$ на такой плоскости изображается точкой с координатами $(a; b)$ или радиус-вектором с теми же координатами. Сложение и вычитание и другие операции над комплексными числами и те же операции над векторами ещё раз подтверждают взаимооднозначное соответствие между декартовой и комплексными плоскостями.

Из геометрической интерпретации комплексных чисел, можно ввести новые понятия для комплексного числа $z = a + bi$. Это его модуль $z = |z|$ и аргумент $\varphi = \arg z$.

Из чертежа имеем: $$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (9)$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r}; \ \cos\varphi = \frac{a}{r} \qquad (10)$$

Отметим, что аргумент φ можно найти и другим способом: сначала определить $tg\varphi = \frac{b}{a}$, а затем, используя алгебраическую форму записи, установить, в какой четверти находится данное комплексное число.

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

Пусть дано квадратное уравнение:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (11)$$

где a, b, c - некоторые числа, $a \neq 0$. Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то корни уравнения вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot i}{2a}, \text{ где } \sqrt{|D|} \text{ - арифметический корень} \qquad (12)$$

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -1 + 3i$.

Решение: $z_1 + z_2 = (2 - 1i) + (-1 + 3i) = (2 - 1) + (-1 + 3)i = 1 + 2i$

Пример 2. Вычислить $z_1 - z_2$, если $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = -2 + 3i.$

Решение: $z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (-2 + 3i) = (4 - (-2)) + (5 - 3)i = 6 + 2i$

Пример 3. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + 2i.$

Решение: $z_1 z_2 = (2 - 3i) \cdot (-4 + 2i) = (2 \cdot (-4) - (-3) \cdot 2) + (2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-4))i = -2 + 16i$

Пример 4. Вычислить $(5 + 10i) + (1 + 2i)(3 - 4i)$.

Решение: применяя свойства дистрибутивности, коммутативности и ассоциативности сложения и умножения комплексных чисел, получаем

$(5+10i)+(1+2i)(3-4i)=5+10i+1\cdot 3+2(-4)i^2+2\cdot 3i+1(-4)i=5+10i+3+8+6i-4i=$
$=5+10i+11+2i=16+12i.$

Пример 5. Вычислить $\dfrac{2+i}{3+4i}$.

Решение: $\dfrac{2+i}{3+4i}=\dfrac{(2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{6-8i+3i-4i^2}{9+16}=\dfrac{10-5i}{25}=0.4-0.2i.$

Пример 6. Вычислить число z^{-1}, обратное числу $z=3-i.$

Решение: $z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3-i}=\dfrac{3+i}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3+i}{9+1}=\dfrac{3+i}{10}=0.3+0.1i.$

Пример 7. Вычислить степени: $i^3, i^4, i^5, i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-5}$;

Решение:

$i^3=i^2\cdot i=-i;\quad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1;\quad i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i;\quad i^{-1}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i;$

$i^{-2}=(i^2)^{-1}=(-1)^{-1}=-1; i^{-3}=\dfrac{1}{i^3}=\dfrac{i}{i^4}=i;\quad i^{-4}=\dfrac{1}{i^4}=1;\quad i^{-5}=\dfrac{1}{i^5}=\dfrac{1}{i}=i^{-1}=-i.$

Пример 8. Найти модули комплексных чисел: 1) $z_1=3-4i;$ 2) $z_2=i$

Решение: по формуле (9) находим $|z_1|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$; $|z_2|=\sqrt{0^2+1^2}=1.$

Пример 9. Найти аргумент комплексного числа $z=-1+\sqrt{3}i$

Решение: так как $a=-1,\ b=\sqrt{3}$, то $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$; далее,

$\cos\varphi=-\dfrac{1}{2},\quad \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда имеем $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi\kappa$.

Пример 10. Найти аргумент комплексного числа $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

Решение: имеем $tg\varphi=\dfrac{b}{a}=\dfrac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}=\sqrt{3};$ так как $a<0$, $b<0$, то угол φ принадлежит III четверти. Значит, $\varphi=\dfrac{4\pi}{3}+2\pi\kappa$.

Пример 11. Решить уравнение $x^2-x+1=0$

Решение: $D=1-4=-3$; $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Найти решение уравнения: $2x^2-x+1=0$;

2. Вычислить z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; z_1^2, *если* $z_1=2-4i$; $z_2=-6+5i$;

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $z=-1+\sqrt{3}i$;

4. Вычислить: $\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}.$

Вариант 2

1. Найти решение уравнения: $3x^2+x+1=0.$

2. Вычислить $z_1+z_2;\quad z_1-z_2;\quad z_1\cdot z_2;\quad \frac{z_1}{z_2};\quad z_1^2,$ *если* $z_1=-3+7i;\quad z_2=5-4i.$

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $z=-2+2\sqrt{3}i.$

4. Вычислить: $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{5-4i}{4+5i}.$

Вариант 3

1. Найти решение уравнения: $x^2+8x+17=0.$

2. Вычислить $z_1+z_2;\quad z_1-z_2;\quad z_1\cdot z_2;\quad \frac{z_1}{z_2};\quad z_1^2,$ *если* $z_1=1+4i;\quad z_2=9-2i.$

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

4. Вычислить: $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}.$

Вариант 4

1.Найти решение уравнения: $x^2+6x+18=0.$

2.Вычислить $z_1+z_2;\quad z_1-z_2;\quad z_1\cdot z_2;\quad \frac{z_1}{z_2};\quad z_1^2,$ *если* $z_1=6-5i;\quad z_2=8+3i.$

3.Найти модуль и аргумент комплексного числа: $z=4-4\sqrt{3}i.$

4.Вычислить: $\frac{-3+5i}{5+3i}-\frac{2-i}{1+2i}.$

Контрольные вопросы

1. Что называется комплексным числом? Укажите его алгебраическую форму.
2. Какие действия можно производить с комплексными числами в алгебраической форме?
3. Что называется противоположным , комплексно сопряженным и обратным числом к числу $z=a+bi$?

4. Как решить квадратное уравнение, если его D<0 ?
5. Как геометрически можно толковать комплексные числа?
6. Что такое модуль и аргумент комплексного числа ?

Критерии выставления оценок за индивидуальное задание:

Оценка «5» -все 4 задания выполнены верно;

«4» - 3 задания выполнены верно, а одно содержит негрубые ошибки;

«3» - выполнено верно 2 задания;

«2» - выполнено верно менее двух заданий.

Тема 2.1. «Матрицы и определители».

Устный фронтальный контроль

1) Пользуясь конспектом лекции и рекомендуемой литературой ответить на вопросы:

- Что называют матрицей?
- Какие матрицы называются прямоугольными? квадратными?
- Какие матрицы называются равными?
- Что называют главной диагональю матрицы?
- Какая квадратная матрица называется диагональной? нулевой? единичной? транспонированной? треугольной? ступенчатой?
- Какие преобразования матрицы называются элементарными? Как привести матрицу к ступенчатому виду? (пример)
- Что называют суммой матриц? В чем состоит обязательное условие существования суммы матриц? Какими свойствами обладает сумма матриц? (пример)
- Что называют произведением матрицы на число? (пример)
- Что называют произведением двух матриц? Как найти произведение двух матриц? В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц? Какими свойствами обладает произведение матриц? (пример)

2) Составить конспект вопроса «Обратная матрица. Порядок вычисления обратной матрицы».

Оценочное задание

3 7 4   1 0 2   4 2 1

Выполнить действия над матрицами: A , B , C :

1 5   2 6 4 3   7 3 5

A - C+B

5A+3B-7C

Вычислить произведение матриц:

1 4   1 3

A ; B ;

6 9   2 5

2 5 1   3

A 9 0   3 ; B 1 .

2 1 4   2

3. Выполните действия над матрицами:

3 4 1   1 5 3 4   3   2 4 1

1   1

0

2 1 5   1 0 1   0 1 3 1

2   5

6 4 1 2   0 1   4

O

Оценочное индивидуальное задание

Практическая работа № 2

«Действия над матрицами»

Цель работы: научиться выполнять действия над матрицами, вычислять определители.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- выполнять операции над матрицами.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая **m** строк одинаковой длины (или **n** столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ....\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно: $A=(a_{ij})$, где $i=\overline{1,m}$ (т.е. $i=1,2,3,...,m$) – номер строки, $j=\overline{1,n}$ (т.е. $j=1,2,3,...,n$) - номер столбца. Матрицу A называют матрицей ***размера*** $m\times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее ***элементами.*** Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной и обозначается A^T.

Действия над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).Аналогично определяется *разность матриц*.

Умножение вектора на число

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ***на число k*** называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Произведение матриц

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы*. Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p} = (b_{ijk})$ называется матрица $C_{m\times з} = (c_{ил})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}, \text{ где } i = \overline{1,m}, k = \overline{1,p},$$

т. е. элемент *i*-й строки и *k*-го столбца матрицы произведения *C* равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *k*-го столбца матрицы *B*.

Тогда произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы *A* (их 3) не совпадает с числом строк матрицы *B* (их 2). При этом определено произведение $B \times A$, которое считают следующим образом:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & {}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$, т.е. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, k = 2, A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27.$

Задания для практического занятия:

Даны матрицы *A* и *B*. Найти:

1. $A+B$, $A-B$
2. $C=2A-3B$
3. AB; BA
4. $\det A$; $\det B$
5. A^{-1}, B^{-1}. Проверить правильность их нахождения умножением $A \cdot A^{-1}$ *и* $B \cdot B^{-1}$:

Вариант 1

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$;

Вариант 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Вариант 3

Вариант 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей? Дать определения основных понятий матрицы;
2. Какая матрица называется квадратной? Единичной?
3. Какие операции можно производить над матрицами?
4. Что такое определитель матрицы? Перечислите его свойства;
5. Как вычислить минор и алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы А?
7. Как найти союзную и обратную матрицы для матрицы А?

Критерии выставления оценок за индивидуальное задание:

Оценка «5» - правильно выполнено 3 задания;

«4» - правильно выполнено 2 задания или правильно выполнено 3 задания, но есть недочеты при решении;

«3» - правильно выполнено 1 задание;

«2» - не выполнено ни одного задания.

Устный фронтальный контроль

3) Пользуясь конспектом лекции и рекомендуемой литературой ответить на вопросы:

- Что называют определителем квадратной матрицы? определителем второго порядка? определителем третьего порядка? Какими свойствами обладает определитель?
- В чем состоит метод треугольников для вычисления определителя третьего порядка? (пример)
- Что называют минором? алгебраическим дополнением элемента определителя? (пример)
- В чем состоит метод разложения по элементам строки (столбца)

для вычисления определителя третьего порядка? высшего порядка? (пример)

- В чем состоит метод Гаусса для вычисления определителей высшего порядка?

4) Составить конспект вопроса «Обратная матрица. Порядок вычисления обратной матрицы».

Оценочное задание

Выполнить действия над матрицами: $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$:

A - C+B

5A+3B-7C

Вычислить произведение матриц:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 9 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

4. Выполните действия над матрицами:

3 4 1   1 5 3 4   3   2 4 1

1   1

2 1 5   1 0 1   0   0 1 3 1

2   5

6 4 1 2   0 1   4

О

Оценочное индивидуальное задание
Практическая работа № 3
«Определители второго и третьего порядков»

Цель работы: научиться выполнять действия над матрицами, вычислять определители.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- выполнять операции над матрицами.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Определитель матрицы

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число det A (или $|A|$, или Δ), называемое ее ***определителем,*** следующим образом:

1. $n = 1. A = (a_1); \det A = a_{1.}$

2. $n = 2. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$

3. $n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

Свойства определителей

Если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Свойство1. («Элементарные преобразования определителей»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель n - 1-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}. Так если:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}.$$

Свойство 2. («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»).

Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения. В случае определителей 3-го порядка свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если определитель $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица A называется ***вырожденной.***

Союзная и обратная матрицы

Матрицей ***союзной к матрице*** А называется матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A. Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$,

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Пусть A – невырожденная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & {}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ и } \det A \neq 0.$$

Составим союзную матрицу

$$A^{*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & {}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда $A^{-1} = \dfrac{A^{*}}{\det A}$, т.е. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Отметим ***свойства*** обратной матрицы:

1. $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$.

Пример по выполнению практической работы

Пример 4. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27.$

Пример 5. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(4 \times 3 - 2 \times 5) - 2(2 \times 3 - 5 \times 1) + 1(2 \times 2 - 4 \times 1) =$$

$$= 3(12 - 10) - 2(6 - 5) = 6 - 2 = 4$$

Ответ: | |=4.

Пример 7. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Решение: $\Delta=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=(-4+4)+2(-8+6)+3(4-3)=-1$

Составим союзную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=0$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-(2+6)=-8$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-(-8+6)=2$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-3=1$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=(4-3)=1$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-(-2-6)=8$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-(8-6)=-2$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1+4=5$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-4-9=-13$

Союзная матрица будет следующей: $A^*=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot A^*=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Проверкой $A\cdot A^{-1}=E$ убеждаемся, что обратная матрица найдена верно.

Задания для практического занятия:

Даны матрицы A и B. Найти:

6. $\det A$; $\det B$

7. A^{-1}, B^{-1}. Проверить правильность их нахождения умножением $A \cdot A^{-1}$ $и$ $B \cdot B^{-1}$:

Вариант 1

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix};$$

Вариант 2

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

Вариант 4

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей? Дать определения основных понятий матрицы;
2. Какая матрица называется квадратной? Единичной?
3. Какие операции можно производить над матрицами?
4. Что такое определитель матрицы? Перечислите его свойства;
5. Как вычислить минор и алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы А?
7. Как найти союзную и обратную матрицы для матрицы А?

Критерии выставления оценок за индивидуальное задание:

Оценка «5» - правильно выполнено 3 задания;

«4» - правильно выполнено 2 задания или правильно выполнено 3 задания, но есть недочеты при решении;

«3» - правильно выполнено 1 задание;

«2» - не выполнено ни одного задания.

Тема 2.2. «Методы решения систем линейных уравнений».

Устный фронтальный контроль

Пользуясь конспектом лекции и рекомендуемой литературой ответить на вопросы:

- Что называют элементарной системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)?
- Что называют решением элементарной СЛАУ?
- Что называют основной матрицей, расширенной матрицей, столбцом свободных членов, столбцом неизвестных, элементарной СЛАУ?
- Каковы основные методы решения СЛАУ?
- В чем суть метода Крамера для решения СЛАУ? (пример)
- В чем суть метода Гаусса для решения СЛАУ? (пример)
- В чем суть матричного метода решения СЛАУ?

Оценочное задание

1. Решить СЛАУ: а) методом Крамера, б) методом Гаусса

Вариант												
4	1	1	-1	0	2	3	-2	2	3	-2	0	1
5	1	1	1	4	2	1	3	9	3	3	-1	0
6	2	1	1	3	5	-2	3	0	1	0	2	5

2 **2**

2. Вычислить определитель:
1

3

3	**11**	**5**
1	**5**	**2**
3	**9**	**5**
1	**3**	**2**

Оценочное индивидуальное задание

Практическая работа № 4

«Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)»

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- решать системы линейных уравнений.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является ***метод Гаусса,*** состоящий в последовательном исключении неизвестных. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (11)$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \qquad (12)$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0, i = \overline{1,k}$. Коэффициенты a_{ii} называются ***главными элементами системы***. На втором этапе (обратный ход) идет последовательно определении неизвестных из этой ступенчатой системы.

Замечание 1. Если ступенчатая система оказывается ***треугольной***, т. е. $k = n$, то исходная система (11) имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $x_{n-2},..., x_1$.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение: в результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3;\ x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1.$

Если положить, например, $x_3 = 0, x_4 = 0,$ найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 0, x_4 = 0.$

Пример 2. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + \ x_2 + \ \ x_3 = 5, \\ 5x_1 - \ x_2 - \ \ x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+y-z=0; \\ -2x+y+z=6; \\ x+y+z=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1+2x_3=5; \\ 2x_1+2x_2+5x_3=10; \\ 3x_1-2x_2+2x_3=-1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3+x_4=9; \\ -x_1+2x_2+x_3+2x_4=24; \\ 3x_1+x_2+x_3-x_4=-1; \\ x_1+3x_2+3x_3-4x_4=-5; \end{cases}$

Вариант 2

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x+3y+2z=9; \\ x+2y-3z=14; \\ 3x+4y+z=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2+3x_3=-1; \\ 2x_1+3x_2+5x_3=3; \\ 3x_1+5x_2+7x_3=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3-2x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-5 \\ x_1-4x_2+2x_3+x_4=11 \\ -3x_1+2x_2+x_3-2x_4=-6 \end{cases}$

Вариант 3

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+3y+z=6; \\ 2x+3y+3z=13; \\ 3x+3y+z=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+-3x_2+2x_3=2; \\ 4x_1-5x_2+2x_3=1; \\ 5x_1-6x_2+4x_3=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-2x_4=1 \\ -x_1+3x_2+2x_3+2x_4=8 \\ 2x_1-x_2+4x_3+3x_4=-5 \\ 2x_1+3x_2+5x_3+5x_4=2 \end{cases}$

Вариант 4

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y+4z=31; \\ 5x+y+2z=29; \\ 3x-y+z=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8; \\ 2x_1+4x_2-5x_3=11; \\ 4x_1-3x_2+2x_3=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3+x_4=-4 \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4=5 \\ 3x_1+x_2-6x_3+x_4=1 \\ -x_1-3x_2+4x_3+2x_4=7 \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. В каком случае исходная система имеет единственное решение?;
2. С чем работают на практике для упрощения преобразований над системой?;
3. Опишите метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Критерии выставления оценок за индивидуальное задание:

Оценка «5» - 2 правильно выполненных задания;

«4» - одно задание выполнено правильно, при выполнении другого допущены негрубые ошибки;

«3» - одно задание выполнено правильно, при выполнении другого допущены грубые ошибки;

«2» - оба задания выполнены неправильно.

Практическая работа № 5

«Формулы Крамера (для систем линейных уравнений с тремя неизвестными)»

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- решать системы линейных уравнений.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Метод Крамера решения систем линейных уравнений

Матричное равенство $X = A^{-1} \cdot B.$ запишем в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots & A_{n2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \\ A_{1n} & A_{2n} \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ .... \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{A_{112}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n}{\Delta}$$

$$.......... .... \qquad (9)$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} ... a_{1n} \\ b_2 a_{22} ... a_{2n} \\ .... \\ b_n a_{n2} ... a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом свободных членов. Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом свободных членов, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$,......., $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$. Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1,n} \qquad (10)$$

называются ***формулами Крамера***.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 = \ 6; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 2\cdot 4 + 5\cdot(-2)\cdot(-2) - 4\cdot(-3)\cdot(-2) - 5\cdot 1\cdot(-3) - (-2)\cdot 2\cdot 3 = 27 + 8 + 20 - 24 + 15 + 12 = 58.$$

Так как главный определитель системы не равен нулю, то она совместна. Находим определители: Δx_1, Δx_2, Δx_3. Определитель Δx_1 получается из главного определителя Δ путём замены в нём первого столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 54 - 4 - 16 + 12 - 12 + 24 = 58.$$

Т.к. Δx_1 отличен от нуля, значит решение системы единственное. Определитель Δx_2 получается из главного определителя Δ путём замены в нём второго столбца на столбец свободных членов.

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$\Delta x_2 =$ 5 -4 2 $= 36 + 48 + 20 - 32 + 90 + 12 = 174.$

4 -2 -3

Определитель Δx_3 получается из главного определителя Δ путём замены в нём третьего столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 18 - 16 - 60 + 72 + 10 - 24 = 0.$$

По формулам Крамера: $x_1 = x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{58}{58} = 1$; $x_2 = x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{174}{58} = 3$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{58} = 0.$

Итак, решением системы будет тройка чисел (1; 3; 0).

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z - 17 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 14; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 20; \\ 3x - 2y - 5z = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9; \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7. \end{cases}$

Вариант 3

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + \quad x_3 = 2; \\ 2x_1 + \quad x_2 - 4x_3 = 9; \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y + \quad z = 10; \\ x + 5y - 2z = -15; \\ 2x - 2y - \quad z = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

Вариант 4

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ 2x_1 - \quad x_2 + 3x_3 = 13; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + \quad y - 3z = -1; \\ x - 3y + 2z = 10; \\ 3x - 4y - \quad z = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -4; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -8. \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. В каком случае система уравнений будет несовместной при решении методом Крамера;

2. Напишите общий вид формул Крамера;

3. Опишите метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Практическая работа № 6

«Решение матричных уравнений»

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом обратной матрицы.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- решать системы линейных уравнений.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Система линейных уравнений. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей ***т*** уравнений и ***п*** неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \; .... \; .... \; .... \; ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, называются ***коэффициентами системы***, числа b_j - ***свободными членами.*** Подлежат нахождению числа x_i, *где* $i = \overline{0,n}$. Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме:***

$$A \cdot X = B, \tag{2}$$

здесь A – матрица коэффициентов системы, называемая ***основной матрицей***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \; .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \text{– вектор - столбец из неизвестных } x_j$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} \text{– вектор - столбец из свободных членов } b_j \tag{3}$$

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$, дополненная столбцом членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{2n}b_2 \\ .... \; .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn}b_m \end{pmatrix} \tag{4}$$

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется ***определенной,*** если она имеет единственное решение, и ***неопределенной,*** если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется ***частным решением системы.*** Совокупность всех частных решений называется ***общим решением. Решить систему*** – это значит выяснить, совместна она или не совместна и если система совместна, значит найти ее общее значение.

Две системы называются ***эквивалентными*** (равносильными), если они имеют одно и то же решение. Эквивалентные системы чаще всего получаются, в частности, при ***элементарных преобразованиях системы*** при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Решение систем методом обратных матриц

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (5)$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$. Основная матрица A такойсистемы квадратная. Определитель этой матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} .... a_{1n} \\ .... \\ a_{n1} .... a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется ***главным определителем системы.*** Если определитель системы отличен от нуля, то система называется ***невырожденной.*** Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$

Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (6)$$

Отыскание решения системы по формуле (1) называют ***методом обратных матриц*** решения системы.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Решить систему уравнений методом обратных матриц:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 11. \end{cases}$$

Решение: $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4+4) + 2(-8+6) + 3(4-3) = -1$

Составим союзную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8+6) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4-9 = -13$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2+6) = -8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5$$

Союзная матрица будет следующей: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot A^* = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы по формуле (6):

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, решением системы будет тройка чисел (1; 2; -1)

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \\ 3x_2 + \ x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 13; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$

Вариант 2

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 11; \\ 5x_2 + 6x_3 = 28; \\ x_1 + 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_2 - 5x_3 = -9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

Вариант 3

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14; \\ 3x - \ y + 2z = 5; \\ x + 2y - z = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 10; \\ -2x_2 - x_3 = -4; \\ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

Вариант 4

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10; \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12; \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Укажите общий вид системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными;

2. Что значит решить систему уравнений? Дать определение общего и частного решений;

3. Опишите метод обратных матриц решения систем линейных уравнений.

Тема 2.3 «Моделирование и решение задач линейного программирования».

Оценочное задание

Практическая работа № 7 «Графический метод решения задачи линейного программирования».

Составить оптимальный план достижения максимальной прибыли от реализации изделий видов А и В. Данные производства приведены в таблице:

№ п/п	Вид сырья	Запрос сырья, кг	Норма сырья на 1 единицу, кг	
			Изделие А	Изделие В
1	S_1	12	6	9
2	S_2	8	3	2
3	S_3	10	1	5
Прибыль от реализации одного изделия, д.е.			18	24

Решить задачу:

1. Лодка находится на озере на расстоянии 3 км от ближайшей точки А берега.

Пассажир лодки желает достигнуть села B, находящегося на берегу на расстоянии 5 км от A (участок AB берега считается прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села в кратчайшее время?

Оценочное индивидуальное задание

Практическая работа № 7 «Графический метод решения задачи линейного программирования».

Цель: отработать навыки по решению задач линейного программирования графическим методом.

Примеры выполнения заданий

Задача 3.

Решить геометрически задачу линейного программирования:

при ограничениях:

Решение.

Изобразим многоугольник решений на рис. 2. Очевидно, что при линия

уровня проходит через начало координат (строить ее не обязательно). Зададим,

например, и построим линию уровня . Ее расположение указывает на направление

возрастания линейной функции (вектор). Так как рассматриваемая задача — на

отыскание максимума, то оптимальное решение − в угловой точке , находящейся на

пересечении прямых I и II, т.е. координаты точки
определяются решением системы уравнений

откуда , т.е. .

Рис. 2.

Максимум (максимальное значение) линейной функции равен .

Итак, при оптимальном решении , т.е. максимальная прибыль в 24 руб. может быть

достигнута при производстве 6 единиц продукции и 4 единиц продукции .

Замечание. Многоугольник допустимых планов может быть в частности треугольником, четырехугольником и т. д. Может оказаться, что полуплоскости не имеют общих точек. Это означает, что система ограничений противоречива и ЗЛП решений не имеет, т.к. нет допустимых планов.

Задание к практическому занятию:

Базовый уровень:

В заданиях **1− 3** составить экономико-математические модели.

Задание 1. Для производства двух видов изделий и предприятие использует три вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг	Общее количество сырья, кг
I		
II		
III		
Прибыль от реализации одного изделия, ден.ед.		

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации

продукции будет максимальной при условии, что изделий надо выпустить не менее, чем

изделий .

Задание 2.Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 70 ден.ед. и содержит: 0,5 ед. жиров, 4 ед. белков, 1 ед. углеводов, 1 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 16 ден.ед. и содержит 3 ед. жиров, 6 ед. белков, 4 ед. углеводов, 3 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 9 ед., белков не менее 5 ед., углеводов не менее 4 ед., нитратов не более 11 ед.

Задание 3.На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт. в сутки	Затраты на работу линий, ден.ед. в сутки	План, шт.

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

Повышенный уровень:

Задание 4.

Найти опорное решение задачи линейного программирования вида и соответствующее допустимое значение целевой функции :

Ответ: 4

Задание 5.

Найти опорное решение задачи линейного программирования вида

и соответствующие допустимые значения целевой функции :

Ответ: 2

Задание 6.

Найти опорное решение задачи линейного программирования вида и соответствующее допустимое значение целевой функции :

Ответ: 3

Задание 7.

Решить графическим методом задачи с двумя переменными (табл. 1)

Таблица 1. Варианты задания 7

Вариант	Задача	Вариант	Задача
	$Z(X)=2x_1+4x_2$®max, $x_1$³0, $x_2$³0		$Z(X)=-3x_1-x_2$®min, $x_1$³0, $x_2$³0

$Z(X)=15x_1+10x_2$®max, $x_1$³0, $x_2$³0 $Z(X)=2x_1+3x_2$®max, $x_1$³0

$Z(X)=3x_1+2x_2$®max, $x_1$³0, $x_2$³0 $Z(X)=4x_1+6x_2$®max,

Продолжение таблицы 1. Варианты задания 7

$Z(X)=2x_1+5x_2$®min, $x_1$³0, $x_2$³0 $Z(X)=-x_1+4x_2$®min, $x_2$³0

$Z(X)=2x_1-x_2$®max, $x_1$³0, $x_2$³0 $Z(X)=x_1+4x_2$®min, $x_1$³0, $x_2$³0

Задание 8. Решить графическим методом задачи с переменными (табл. 2).

Таблица 2. Варианты задания 8

Вариант	Задача	Вариант	Задача
	$Z(X)=2x_1+8x_2+3x_3+4x_4$® min, x_j³0, $j=1,2,3,4$		$Z(X)=2x_1+6x_2+x_3+x_4$®max, x_j³0, $j=1,2,3,4$
	$Z(X)=2x_1+3x_2-x_3+4x_4$®min, x_j³0, $j=1,2,3,4$		$Z(X)=2x_1+5x_2+x_3+x_4$®max, x_j³0, $j=1,2,3,4$
	$Z(X)=4x_1+13x_2+3x_3+6x_4$®min, x_j³0, $j=1,2,3,4$		$Z(X)=9x_1+2x_2+4x_3-8x_4$®max, x_j³0, $j=1,2,3,4$
	$Z(X)=x_1+x_2+3x_3+4x_4$®min, x_j³0, $j=1,2,3,4$		$Z(X)=x_1-2x_2-x_3+3x_4$®max, x_j³0, $j=1,2,3,4$
	$Z(X)=11x_2+x_3+4x_4$®min, x_j³0, $j=1,2,3,4$		$Z(X)=2x_1+x_2-x_3-2x_4$®min, x_j³0, $j=1,2,3,4$

Вопросы для самостоятельной работы

Базовый уровень:

1. Что называется экономико-математической моделью?

2. Перечислить основные этапы экономико-математического моделирования.

3. Что называется целевой функцией?

4. Сформулируйте общую постановку задачи линейного программирования.

Повышенный уровень:

5. В чем суть принципа оптимальности в планировании и управлении?

6. В чем заключается геометрическая интерпретация задачи линейного программирования?

7. Каковы основные этапы метода графического решения задачи линейного программирования?

8. Каким может быть множество допустимых решений задачи линейного программирования?

9. Какое направление для целевой функции указывает ее градиент?

10. Когда применяется графический метод ЗЛП?

Тема 3.2 «Пределы и непрерывность».

Устный фронтальный контроль

Пользуясь конспектом лекции и рекомендуемой литературой ответить на вопросы:

1. Что называют пределом бесконечной числовой последовательности
2. Что понимают под пределом функции на бесконечности?
3. Что понимают под пределом функции в точке?
4. Какая функция называется непрерывной в точке на промежутке X?
5. Какие арифметические операции можно выполнять над пределами?
6. Как вычислить предел во внутренней точке области определения любой элементарной функции?
7. Какая функция называется бесконечно малой (бесконечно большой) в точке на бесконечности?
8. Какова взаимосвязь между бесконечно малыми и бесконечно большими?
9. Каковы основные приемы раскрытия неопределенностей , , ?
10. Что понимают под левосторонним (правосторонним) пределом функции в точке
11. Какую точку называют точкой разрыва 1 рода?
12. Какую точку точкой разрыва 2 рода?
13. Какую точку точкой устранимого разрыва?
14. В чем суть исследования функции на непрерывность?

15. Что такое асимптота графика функции? какие существуют виды асимптот? Как найти вертикальные асимптоты? наклонные асимптоты?

Практическая работа № 10 «Вычисление пределов функции: раскрытие неопределённости, использование замечательных пределов»

Цель работы: научиться вычислять пределы, раскрывать неопределенности.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

знать:

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Число B называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** a (или при x, стремящемся к a), если для любой последовательности значений аргумента $x_n \neq a$, сходящейся к a, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$ сходится к числу B.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ или $f(x) \to B$ при $x \to a$.

Короче, $B = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = B$ для любой последовательности $x_n \neq a$, $n \in N$, сходящейся к a, т.е. $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Свойства пределов сформулируем в виде теорем:

Теорема 1: Функция не может иметь двух разных пределов в точке.

Теорема 2: Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$

Теорема 3: Предел произведения функций равен произведению их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x),$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x),$$

Теорема 4: Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},$$

Приводим некоторые приёмы вычисления пределов, излагая их на конкретных примерах.

1) ***Предел многочлена***. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3+2x^2-3x+7)$

Решение: $$\lim_{x\to 2}(5x^3+2x^2-3x+7)=\lim_{x\to 2}\left(5x^3\right)+\lim_{x\to 2}\left(2x^2\right)-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}7=5\lim_{x\to 2}x^3+2\lim_{x\to 2}x^2-3\lim_{x\to 2}x+7=$$
$$=5\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3+2\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+7=5\cdot 2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2+7=49$$

Т.о. для вычисления предела многочлена *f (x)* при $x\to a$ достаточно вместо переменной *x* поставить значение *a*, к которому она стремится, и выполнить соответствующие действия, т.е. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

2) ***Предел отношения двух многочленов***, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *где a– число*.

а) Если *g (a)* $\neq$ *0*, то можно применить теорему о пределе частного.

б) Если *g (a)* = 0, то теорему о пределе частного применить нельзя. Тогда если *f(a)* = *A* $\neq$ 0, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, если же *f(a)* = 0 – имеем неопределённость вида (0/0). В этом случае предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ можно вычислить разложением многочленов *f(x)* и *g(x)* на множители.

Дадим определение предела функции *f(x)* на бесконечности, т.е. $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

Пусть функция *f(x)* определена на всей числовой прямой. Число *B* называется **пределом функции *f(x)* при $x\to+\infty$**, если $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=B$ для любой последовательности (x_n) такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=C$, если $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=C$ для любой последовательности (x_n) такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$ В ряде случаев поведение функции *f(x)* разное при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Например, для функции $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}$, определенной для всех $x \neq 1$, имеем:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1} = -3, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1} = 3.$$

Поэтому при исследовании свойств функций рассматривают как $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, так и $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x)$.

Сформулируем определение **бесконечного предела функции**:

Если для любой последовательности значений аргумента (x_n) такой, что $x_n \neq a$ имеет место $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$, то говорят, что предел функции *f(x)* в точке *a* есть бесконечность, и пишут $\lim\limits_{ч \to a} f(x) = \infty$.

3) *Предел отношения многочленов* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *при* $x \to \infty$.

4) *Пределы некоторых иррациональных функций.* Для вычисления $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)}$,

где $f(x) \geq 0$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, воспользуемся равенством $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(a)}$, которое принимается нами без доказательства. Например,

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \sqrt{2(-1)^2 - 3(-1) + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Так как $\lim\limits_{x \to 0}\left(\sqrt{3x^2 - x + 4} - 2\right) = 0$,(пример 6) то теорему о пределе частного применить нельзя. Имеем неопределённость вида (0/0). Умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю, получим **(пример7)** Данный пример демонстрирует технику раскрытия **неопределенности вида (∞-∞).**

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то функция *f(x)* называется **бесконечно большой при** $x \to a$. Если же $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функция *f(x)* называется **бесконечно малой при** $x \to a$. Аналогично определяются бесконечно большие и бесконечно малые функции при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Заметим, что имеет место следующее утверждение: если функция *f(x)* – бесконечно малая при $x \to a$ и $f(x) \neq 0$ для $x \neq a$ из некоторой окрестности точки *a*, то функция $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая при $x \to a$. Верно и обратное утверждение: если функция *f(x)* – бесконечно большая при $x \to a$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая при $x \to a$.

5) *Применение замечательных пределов* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Пользуясь этими формулами, можно вычислить ряд пределов (пример 8).

Здесь мы воспользовались известным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. (пример 9)

Заменяя $\frac{2x}{3} = y$ и учитывая, что $y \to \infty$ при $x \to \infty$, можем написать (пример 10)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+3/_{2x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(2x/_3\right)}\right)^{\left(2x/_3\right)}\right)^{15/_2} = \lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{15/_2} = e^{15/_2}.$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Пусть требуется вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}. = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$

Решение: $f(x) = x^3 - 2x - 3$ и $g(x) = x^2 + 3x + 3$. Так как $g(3) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 3 = 21 \neq 0$. то имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-2x-3\right)}{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+3x+3\right)} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$.

Решение: здесь $f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$, $g(2) = 2^2 - 6\cdot 2 + 8 = 0$. Так как $x \neq 2$, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-4} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(4-\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)} = \frac{3-0+0+0}{4-0-0+0} = \frac{3}{4}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)} = 0.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)}{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\infty$.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{\left(3x^2-x+4\right)-2^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{3x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{3x-1}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{3\cdot 0-0+4}+2\right)}{3\cdot 0-1}=-8$$

Пример7. Найти предел $\lim\limits_{ч\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

$$\lim_{ч\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{ч\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{ч\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{ч\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}$, заменяя $3x = y$ и учитывая, что $y \to 0$ при $x \to 0$, получаем: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=3\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=3\cdot 1=3$.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{\cos 5x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{5\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{3\sin 3x}\right)=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{3}$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{5x}$

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/2x)^{5x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(2x/3\right)}\right)^{2x/3\cdot 3/2\cdot 5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(2x/3\right)}\right)^{\left(2x/3\right)}\right)^{15/2}$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Вычислить пределы функций в точке:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3+2x^2-7x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to 11}\frac{x^2-121}{x-11}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-3x}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^3-5x+2}{6x^2+5x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-7})$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}x\,ctg\,2x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{\cos 5x-\cos 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x}$

Вариант 2

1. Вычислить пределы функций в точке:

а) $\lim\limits_{x\to -3}(5x^3-4x^2+6x+2)$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2-64}{x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+2x-6}{x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x^3}{x^2-6x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-1}{5+3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tg\,3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x}$;

Вариант 3

1. Вычислить пределы функций в точке:

а) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+6x^2-12x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x+31}-6}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{5x-1+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+x^3}{3x^3+2x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+x^3-6}{1+4x-2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{4x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{6x}\right)^{x}$;

Вариант 4

1. Вычислить пределы функций в точке:

а) $\lim\limits_{x\to 5}(x^3-4x^2+8x-18)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2-49}{x+7}$; г) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x+7}{\sqrt{x+32}-5}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+2x-1}{6-3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x^3}{x^3-12x^5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-4x+9}{4-2x+x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} ctg 3x\cdot\sin 4x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 3x+\sin 7x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{5x}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{4x}$;

Контрольные вопросы

1.Что называется пределом функции в точке? На бесконечности?
2.Какие свойства пределов функций вы знаете?
3.Как раскрывать неопределенности?
4.Какие замечательные пределы вы знаете?

Тема 5.1 Производная и дифференциал

Практическая работа №11

«Экстремум функции нескольких переменных»

Цель работы: научиться находить экстремумы функции, наименьшего и наибольшего значений функций на отрезке.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

знать:

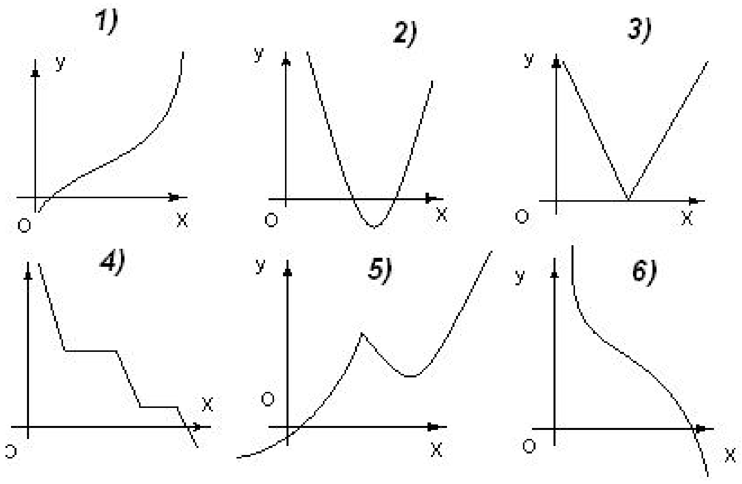
- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Монотонные и немонотонные функции. Правило отыскания интервалов монотонности функции

К монотонным функциям относятся возрастающие, строго возрастающие, убывающие и строго убывающие функции. Функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, называется ***возрастающей*** на интервале $(a; b)$, если при любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, называется ***убывающей*** на интервале $(a; b)$, если при любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Функция y = f(x), $x \in$(a; b), называется **возрастающей (убывающей)** на интервале (a; b), если при любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

Интервалы, в которых функция либо только возрастает (не убывает), либо только убывает (не возрастает), называются интервалами строгой монотонности (интервалами монотонности). Все остальные функции относятся к немонотонным. Так, например, к монотонным относятся функции изображенные на рисунках 1, 2, 6. Остальные –графики немонотонных функций.



Теорема 1. (Достаточное условие возрастания и убывания функции)

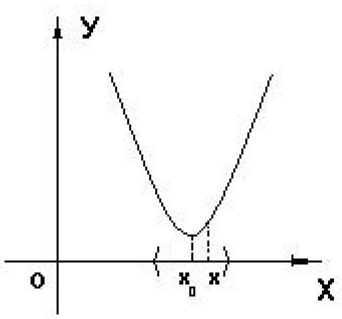
Если $f'(x) \geq 0$ в каждой точке интервала *(a; b),* то *f(x)* возрастает на *(a; b),* если $f'(x) \leq 0$ в каждой точке интервала *(a; b),* то на этом промежутке *f(x)* убывает.

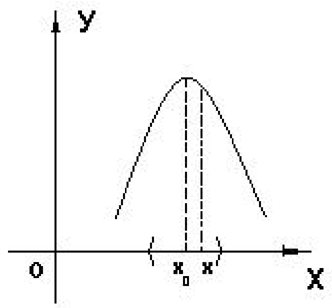
Правило отыскания промежутков монотонности функции:

1. Вычислить производную функции $f'(x)$***;***
2. Найти точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует. Эти точки называются ***критическими точками функции*** $f(x)$***;***
3. Определить знак производной функции в интервалах, на которые критические точки разбивают область определения функции $f(x)$***;***
4. Применить Теорему 1.

Исследование функций на экстремум

Точка x_0 - называется ***точкой минимума*** функции *f(x)* , если существует окрестность точки x_0 O(x_0), такая что $\forall x \in O(x_0), x \neq x_0$ выполняется условие $f(x) \succ f(x_0)$





Точка x_0 - называется ***точкой максимума*** функции *f(x)*, если существует окрестность точки x_0 O(x_0), такая что $\forall x \in O(x_0), x \neq x_0$ выполняется условие $f(x) \prec f(x_0)$. Точки минимума и максимума называются ***точками экстремума функции***.

Теорема 2. (Достаточное условие существования точек экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в точке x_0 и имеет в ее окрестности производную. Тогда, если:

1) $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с « минуса » на «плюс», то точка x_0 - точка минимума;
2) $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с « плюса » на «минус», то точка x_0 - точка максимума;
3) $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знака, то в точке x_0 экстремумов нет.

Правило отыскания точек экстремума функции:

1. Найти критические точки функции *f(x), т.е. точки, в которых* $f'(x) = 0$ или не существует;
2. Исследовать знак производной в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками;

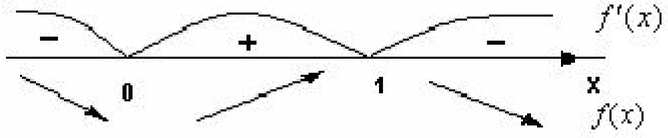
3.Применить теорему 2.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Найти интервалы монотонности функции $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 6$;

Решение: данная функция определена на всей числовой прямой. Применим правило отыскания промежутков монотонности:

1. Вычислим производную: $f'(x) = 6x - 6x^2$;
2. Найдем критические точки: $f'(x) = 6x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 6x \cdot (1 - x) = 0 \Leftrightarrow$
$x_1 = 0$ *и* $x_2 = 1$ – *критические точки*
3. Определим знаки производной в интервалах:



4. Применим теорему 1: $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 6$ возрастает на $(0;\ 1)$; убывает на $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 2. Какая из функций убывает на всей своей области определения?

1) $y = x^2$; 2) $y = 3x$; 3) $y = -5x + 1$; 4) $y = -x^3 + x$

Решение: если функция убывает на всей свой области определения, значит по теореме 1 на всей своей области определения $y' \prec 0$ и этот знак производной не меняется, т.е. нет критических точек.:

1) для первой функции имеем $y' = (x^2)'' = 2x = 0 \Rightarrow$ критическая точка есть;

2) $y' = (3x)' = 3 \succ 0$ - на всей области определения производная функции положительна;

3) $y' = (-5x + 1)' = -5 \prec 0$ - на всей области определения производная функции отрицательна;

4) $y' = (-x^3 + x)' = -3x^2 + 1 = 0$ - критических точек будет две, при переходе через которые знак производной будет меняться. Значит, решением примера будет функция. $y = -5x + 1$.

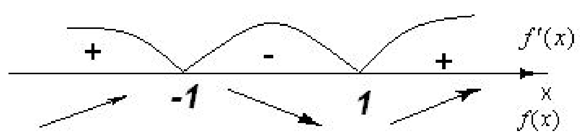
Пример 3. Найти экстремумы функции $y = x^3 - 3x$

Решение: *D(f)*=R,

1) Найдем критические точки функции $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1) = 0$

$x_1 = 1$ *и* $x_2 = -1$ – *критические точки* $f(x)$;

2) Определим знаки производной в интервалах, на которые разбивается область определения критическими точками



3) Т.о. $x_1 = -1$ - точка максимума - max *f(x)*= $f(1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$;

$x_2 = 1$ - точка минимума - $\min f(x) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$;

Пример 4: Найти наименьшее и наибольшее значение функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

на отрезке $[-3;\ 3]$

Решение: Функция $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$ непрерывна на отрезке $[-3;\ 3]$. найдем критические точки функции, для этого вычислим ее производную и приравняем ее нулю:

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=2$ - критические точки функции, причем обе они принадлежат отрезку $[-3;\ 3]$. Вычислим значения функции в критических

точках и на концах отрезка:

$$f(-1)=17,\quad f(2)=-10,\quad f(-3)=-35,\quad f(3)=1.$$

Т.о., наименьшее значение функции равно -35 и достигается на левой границе отрезка, а наибольшее значение функции равно 17 и достигается во внутренней точке $x=-1$.

Пример 5: Требуется огородить проволочной сеткой длиной ***2p*** участок прямоугольной

формы. Найти размеры участка, при которых его площадь будет наибольшей;

Решение: из условий задачи имеем, что периметр участка равен ***2p.*** Обозначим длины сторон прямоугольника ***x*** и ***y***. Тогда из периметра прямоугольника имеем

$$P=2(x+y)=2p \Rightarrow x+y=p \Rightarrow y=p-x.$$

Обозначим через *S(x)* площадь прямоугольника. Тогда $S(x)=xy=x(p-x)=px-x^2$, причем $p\in[0;\ p]$Исследуем полученную функцию на экстремум:

$S'(x)=(px-x^2)'=p-2x=0 \Rightarrow 2x=p \Rightarrow x=\dfrac{p}{2}$ - критическая точка, принадлежащая отрезку $[0;\ p]$. Исследуя знак $S'(x)$ в интервалах $\left(0;\ \dfrac{p}{2}\right)$ *и* $\left(\dfrac{p}{2};\ p\right)$, получаем, что на первом из них *S(x)* возрастает, а на втором убывает. Следовательно, при $x=\dfrac{p}{2}$ площадь прямоугольника будет наибольшей. Найдем $y=p-x=p-\dfrac{p}{2}=\dfrac{p}{2}$. Значит, из прямоугольников с периметром ***2p,*** наибольшую площадь будет иметь квадрат со стороной $\dfrac{p}{2}$.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Найти промежутки монотонности функции:

1) 1) $f(x)=x^3+3x^2-9x$; 2) $y=\dfrac{1}{(x-5)^2}$;

2. Исследовать на экстремум функции:

1) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$; 2) $y = \dfrac{x}{9 - x^2}$;

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке:

1) $y = 6x^2 - 3x^4 - 1, \quad x \in [-2;\, 2]$; 2) $y = \sqrt{25 - x^2} \quad x \in [-4;\; 4]$;

4. Данное положительное число $\boldsymbol{m}$ разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим .

Вариант 2

1. Найти промежутки монотонности функций:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$; 2) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 7}$;

2. Исследовать на экстремум функции:

1) $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$; 2) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 8}$;

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке:

1) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - \dfrac{1}{3}, \quad x \in [-2;\, 2]$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2}(2 - x) \quad x \in [-6;\; 1]$;

4. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник. Найти его размеры (длину и ширину), чтобы его периметр был наибольшим;

Вариант 3

1. Найти промежутки монотонности функции:

1) $y = x^4 - \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + x$; 2) $y = \sqrt{x}(x - 3)$;

2. Исследовать на экстремум функции:

1) $y = 1{,}5x^4 - 2x^3 + 5$; 2) $y = \dfrac{x^4 + 48}{x}$;

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке:

1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7, \quad x \in [-4; 3]$; 2) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1} \quad x \in [0;\; 4]$;

4. Из квадратного листа жести со стороной 69 см необходимо сделать открытую коробку возможно большего объема, вырезая по углам квадраты, удаляя их и загибая жесть для образования боков коробки. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший объем?

Вариант 4

1. Найти промежутки монотонности функции

1) $y = x^4 + 8x^3 + 5$; 2) $y = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$;

2. Исследовать на экстремум функции:

1) $y = (x+1)^3(5-x)$; 2) $y = \dfrac{(x-4)^2}{x^2 - 2x + 5}$;

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке:

1) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 4, \quad x \in [-4;\ 2]$; 2) $y = \sin 2x - x, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$;

4. Найти высоту прямого кругового цилиндра наибольшего объема, который может быть вписан в шар радиуса R;

Контрольные вопросы

1. Какие функции называются монотонными? Дайте определение интервалов монотонности функции;
2. Как находятся интервалы монотонности функции?
3. Что такое точка минимума функции, точка максимума функции, точки экстремума функции?
4. Что называется экстремумом функции и как его находить? Сформулируйте достаточное условие существования экстремума функции и правило отыскания экстремумов функции;
5. Сформулируйте правило отыскания наименьшего и наибольшего значения функции на отрезке?

Практическая работа № 12 «Методы замены переменной и интегрирования по частям».

Цель работы: научиться вычислять неопределенные интегралы.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

<u>уметь:</u>

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

<u>знать:</u>

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Неопределенный интеграл

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна *f(x):*

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \le x \le b \qquad (1)$$

Совокупность всех первообразных функций F(x) + c для функции f(x) на некотором промежутке называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а С - произвольной постоянной интегрирования. Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием.*

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C; \qquad (n \ne -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C;$

13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

16. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C;$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \; a \neq 0.$$

Метод непосредственного интегрирования

Под непосредственным интегрированием понимают способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводятся к одному или нескольким табличным интегралам.

Интегрирование способом подстановки

Сущность интегрирования методом подстановки заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования. Для нахождения $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x=\varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получаем $dx=\varphi'(u)du$.

Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения , выраженные через u du, имеем:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du=\int F(u)du \qquad (3)$$

После того, как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u=\phi(x)$ он приводится к переменной x.

Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке. Найдем дифференциал произведения этих функций:

$$d(uv)=u'vdx+uv'dx.$$

Так как по условию функции $u'v$ и uv' непрерывны, можно проинтегрировать обе части этого равенства,

$$\int d(uv)=\int u'vdx=\int uv'dx,$$

или

$$\int d(uv)=\int vdu+\int udv$$

но

$$\int d(uv)=uv+C,$$

следовательно

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (4)$$

В правой части формулы (4) постоянную интегрирования C не пишут, т.к она фактически присутствует в интеграле $\int vdu$. Формула (4) называется ***формулой интегрирования по частям.***

Сущность метода интегрирования по частям вполне соответствует его названию. Дело в том, что при вычислении интеграла этим методом подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде произведения множителей u и dv; при этом dx обязательно входят в dv. В результате получается, что заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int vdu$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных двух интегралов более проста, чем нахождение заданного интеграла.

При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разумное разбиение подынтегрального выражения на множители u и dv. Общих установок по этому вопросу не имеется. Однако, для некоторых типов интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, сделать это возможно.

1. В интегралах вида: $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$, где *P(x)* – многочлен относительно *x*, *a* – некоторое число, полагают $u = P(x)$, а все остальные сомножители за dv.
2. В интегралах вида: $\int P(x)\ln|ax|dx$, $\int P(x)\arcsin axdx$, $\int P(x)\arccos axdx$, $\int P(x) arctgaxdx$, $\int P(x) arcctgaxdx$ полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители за u.
3. В интегралах вида: $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, где *a* и *b* числа, за u можно принять любую из функций e^{ax} или *sin bx* (или *cos bx*).

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить: 1) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx$; 2) $\int \frac{(x+2)^3 dx}{x}$;

Решение:

1) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx = 5\int x^4dx - 4\int x^3dx + 3\int x^2dx - \int dx = x^5 - x^4 + x^3 - x + C$;

2) $\int \frac{(x+2)^3 dx}{x} = \int \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x}dx = \int (x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x})dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 12x + 8\ln|x| + C$

Пример 2. Вычислить 1) $\int (1+x)^5 dx$; 2) $\int \frac{2e^x dx}{(1-e^x)^2}$; 3) $\int \frac{x^2+1}{x+2}dx$; 4) $\int x \cdot \sqrt{x-3}dx$;

5) $\int \sin 8x \cos 2x \, dx$;

Решение:

1) Положим *1+x = z*. Продифференцируем это неравенство: *d(1+ x)= dz* или *dx = dz.*

Заменим в интеграле**:** $\int (1+x)^5 dx = \int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{1}{6}\cdot(1+x)^6 + C$.

2) Сделав замену : $1-e^x=z$, получим $d(1-e^x)=dz \Rightarrow -e^x dx=dz; \quad \Rightarrow e^x dx=-dz;$

Тогда:

$$\int \frac{2e^x dx}{(1-e^x)^2}=-2\int \frac{dz}{z^2}=\frac{2}{z}+C=\frac{2}{1-e^x}+C;$$

3) Положим $x+2=t; \Rightarrow x=t-2; \Rightarrow dx=d(t-2)=dt$

$$\int \frac{x^2+1}{x+2}dx=\int \frac{(t-2)^2+1}{t}dt=\int \frac{t^2-4t+5}{t}dt=\int \left(t-4+\frac{5}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}-4t+5\ln|t|+C=$$

$$=\frac{(x+2)^2}{2}-4(x+2)+5\ln|x+2|+C=\frac{x^2}{2}-2x-6+5\ln|x+2|+C=\frac{x^2}{2}-2x+5\ln|x+2|+C_1,$$

где $C_1=C-6$;

4) Пусть $\sqrt{x-3}=t$, тогда $x=t^2+3, \quad dx=2tdt$. Поэтому

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}dx=\int (t^2+3)\cdot t\cdot 2tdt=2\int (t^4+3t^2)dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+C=$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C;$$

5) Этот интеграл решается с помощью формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Поэтому, имеем $\int \sin 8x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int (\sin 10x+\sin 6x)dx=-\frac{1}{20}\cos 10x-\frac{1}{12}\cos 6x+C$;

Пример 3. Вычислить 1) $\int x\sin xdx$; 2) $\int x\ln xdx$;

Решение:

1) положим $u=x$, $dv=\sin xdx$; тогда $du=dx$, $\int dv=\int \sin xdx$, т.е. $v=-\cos x$. Используя формулу (4), получим $\int x\sin xdx=-x\cos x+\int \cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$.

2) $\int x\ln xdx$; положим $u=\ln x$, $dv=xdx$; тогда $du=\frac{dx}{x}$; $v=\int dv=\int xdx=\frac{x^2}{2}$.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(2x^2+7x-1)dx$; б) $\int\frac{(2-3x)^2}{x^3}dv$ в) $\int(6^x-\frac{4}{\sqrt{x}})dx$

г) $\int\left(3\sin x+\frac{4}{x^4}\right)dx$; д) $\int\left(\frac{8}{\cos^2 x}-\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$; е) $\int\frac{dx}{121+x^2}$;

2. Методом подстановки вычислить:

а) $\int(7+3x)^5dx$; б) $\int 3\sin 5xdx$; в) $\int\frac{5dx}{1+9x^2}$; г) $\int\sqrt[3]{(2-5x)^2}dx$;

д) $\int\sqrt{e^x-1}\cdot e^xdx$ е) $\int\frac{3dx}{1+2x}$; ж) $\int\frac{\ln^2 xdx}{x}$; з) $\int\sin 5x\cos 3xdx$;

3. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int(1-x)\sin xdx$ б) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$

Вариант 2

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(4x^4-8x^3+\sqrt{x})dx$; б) $\int\frac{(1-4x)^2}{x^4}dx$; в) $\int(6^{2x}-\frac{4}{x})dx$;

г) $\int\left(10\cos x-\frac{2}{x^3}\right)dx$; д) $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{12}{81+x^2}\right)dx$; е) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}}$;

2. Методом подстановки вычислить:

а) $\int(5-4x)^6dx$; б) $\int 7\cos 6xdx$; в) $\int\frac{4dx}{3-4x}$; г) $\int\frac{7dx}{\sqrt{1-16x^2}}$;

д) $\int\sqrt[3]{x^2-3}\cdot xdx$; е) $\int\frac{e^xdx}{e^x+1}$; ж) $\int\frac{tgx\,dx}{\cos^2 x}$; з) $\int\sin 2x\sin 6xdx$;

3. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int x\cos x dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

Вариант 3

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(-x^3-8x^2+4)dx$; б) $\int\frac{(4x+x^2)^2}{x^5}dx$; в) $\int(\sqrt[3]{x^2}-5^x)dx$

г) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{49-x^2}}+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)dx$; д) $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx$; е) $\int\frac{dx}{25+16x^2}$;

2. Методом подстановки вычислить:

а) $\int(2-7x)^4 dx$; б) $\int 6\cos 2x dx$; в) $\int\frac{5dx}{3-4x}$; г) $\int\frac{2dx}{1+16x^2}$;

д) $\int\sqrt[4]{(7x+4)^3}\,dx$; е) $\int e^x\cos(e^x)dx$; ж) $\int\frac{\sin x\,dx}{5-2\cos x}$; з) $\int\cos 4x\cos 5x dx$;

3. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int xe^x dx$; б) $\int\arcsin x\,dx$;

Вариант 4

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(9x^5+3x^2-8)dx$; б) $\int\frac{(x-2x^2)^2}{x^2}dx$; в) $\int(2^{3x}-9\sqrt{x}+5)dx$;

59

г) $\int\left(\frac{8}{100+x^2}-\frac{1}{4\cos^2 x}\right)dx$; д) $\int\left(\frac{5}{x^4}+4\cos x\right)dx$; е) $\int\frac{3dx}{\sqrt{4-49x^2}}$.

2. Методом подстановки вычислить:

а) $\int(2x-9)^3 dx$; б) $\int 11\sin 3x dx$; в) $\int\frac{9dx}{4x-5}$; г) $\int\frac{7dx}{\sqrt{1-36x^2}}$;

д) $\int\sqrt{4\sin x-1}\,\cos x dx$; е) $\int\frac{e^x dx}{\sin^2(e^x)}$; ж) $\int\frac{\arcsin^2 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; з) $\int\sin 8x\cos 3x dx$;

3. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int x^2\ln x dx$; б) $\int arctg\,x\,dx$.

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x), \quad x \in (a; b\ )$?
2. Что называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на некотором промежутке?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Перечислите основные табличные интегралы.
5. Какие методы интегрирования вы знаете?

Практическая работа № 13 «Вычисление определенного интеграла методом замены переменной».

Цель работы: научиться вычислять определенные интегралы.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

знать:

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Определённый интеграл

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ функции $f(x)$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется ***определённым интегралом от а до b функции f (x):***

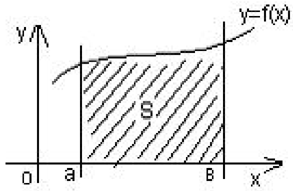
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Числа a и b называются ***пределами интегрирования, а – нижним, b – верхним.*** Отрезок $[a;b]$ называется ***отрезком интегрирования.*** Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией,*** а переменная x – ***переменной интегрирования.*** Формула (1) называется ***формулой Ньютона - Лейбница.***

Геометрический смысл определенного интеграла

Если интегрируемая на отрезке [a;b] функция f (x) неотрицательна, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f (x), осью абсцисс и прямыми x = a и x = b :

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



Свойства определённого интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Если a<c<b, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

4. Если функция $f(x)$ неотрицательная на отрезке [$a;b$], где $a<b$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

5. Если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a;b]$, где $a<b$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

6. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке [$a;b$], где $a<b$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \mathrm{M}(b-a)$

7. (Теорема о среднем). Если функция *f (x)* непрерывна на отрезке [*a;b*], то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

Методы вычисления определенного интеграла

Непосредственное интегрирование предполагает использование основных свойств определенного интеграла и формулы Ньютона – Лейбница.

Метод подстановки сводит определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью подстановки $u = \varphi(x)$ к определенному интегралу относительно новой переменной *u.* При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования a_1 и b_1, которые находятся из исходной подстановки: $a_1 = \varphi(a)$, $b_1 = \varphi(b)$.

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле производится по формуле

$$\int_a^b u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{dv} = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\underbrace{u'(x)dx}_{du},$$

где полагается, что функции *u(x)* и *v(x)* непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;\ b]$.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1: Вычислить $\int_0^{\frac{n}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x}$.

Решение**:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 3tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg0\right) = 3$$

Пример 2: Вычислить $\int_0^{\pi} \left(2e^{2x} + 3\cos x\right)dx$

Решение: $\int_0^{\pi} \left(2e^{2x} + 3\cos x\right)dx = 2\int_0^{\pi} e^{2x}dx + 3\int_0^{\pi} \cos x dx = \left(e^{2x} + 3\sin x\right)\Big|_0^{\pi} = \left(e^{2\pi} + 3\sin\pi\right) - \left(e^0 + 3\sin 0\right) =$
$= e^{2\pi} - 1 \approx 534{,}492$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$:

Решение: $\int\limits_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \cdot dx = 4\int\limits_1^8 xdx - \frac{1}{3}\int\limits_1^8 x^{-2/3}dx = 2x^2\Big|_1^8 - \sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$

$= 2(8^2 - 1) - (\sqrt[3]{8} - 1) = 2 \cdot 63 - 1 = 125$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_0^1 \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx$

Решение:

$$\int\limits_0^1 \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ d(e^x - 1) = dt \\ e^x dx = dt \\ a' = e^0 - 1 = 0 \\ b' = e^1 - 1 = e - 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^{e-1} = \frac{(e-1)^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}(e-1)^5$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}dx$.

Решение: Положим $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\, dt$. Если $x = 0$, *то* $t = 0$, если $x = 2$, *то* $t = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t}\; 2\cos t\, dt = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\, dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)dt = 2(t - \frac{1}{4}\sin 4t)\;\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(4 \cdot \frac{\pi}{2})) - 0 = \pi$$

Пример 6. Вычислить $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$.

Решение: Положим $u = \ln x,\ dv = \sqrt{x}dx = x^{\frac{1}{2}}dx \ \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Отсюда, учитывая формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln xdx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2}-\frac{2}{3}\int_1^{e^2}x\sqrt{x}\frac{dx}{x}=\frac{2}{3}e^6\cdot 4-\frac{2}{3}\int_1^{e^2}\sqrt{x}dx=\frac{8}{3}e^6-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^{e^2}=\frac{8}{3}e^6-\left(\frac{4}{9}e^6-\frac{4}{9}\right)=$$
$$=\frac{4}{9}\left(5e^6+1\right)$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Вычислить методом непосредственного интегрирования:

$$1)\ \int_{-\frac{n}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x};\qquad 2)\ \int_{-1}^{1}3(1+z^2)dz;\qquad 3)\ \int_0^4(x-3\sqrt{x})dx;$$

$$4)\ \int_1^2\frac{4x^5-3x^4+x^3-1}{x^2}dx;\qquad 5)\ \int_{-1}^{0}\frac{(x^2-2x)(3-2x)}{x-2}dx;$$

2. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

$$1)\ \int_{-2}^{1}\left(5-2x\right)^2dx;\qquad 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{3-\cos x}dx;\qquad 3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x+1}}dx;;$$

$$4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos xdx;\qquad 5)\ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{3+4x^2};$$

3.Вычислить методом интегрирования по частям:

$$1)\ \int_0^1\left(1-x\right)e^{-x}dx;\qquad 2)\ \int_0^{\pi}e^x\sin xdx;$$

Вариант 2

1. Вычислить методом непосредственного интегрирования:

$$1)\ \int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}\qquad 2)\ \int_{-1}^{1}5(y^2+1)dy;\qquad 3)\ \int_1^9(2x-\frac{3}{\sqrt{x}})dx;$$

4) $\int\limits_{2}^{3}\frac{6x^4-4x^3+7x^2-1}{x^2}dx$; 5) $\int\limits_{2}^{3}\frac{(x^2-3x+2)(2+x)}{x-1}dx$;

2. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int\limits_{2}^{3}(2x-1)^2dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}3e^{x^2}xdx$;

4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos^2 x\,dx$; 5) $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x}{e^x+5}dx$;

3.Вычислить методом интегрирования по частям:

1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx$; 2) $\int\limits_{0}^{1}\arccos xdx$;

Вариант 3

1. Вычислить методом непосредственного интегрирования:

1) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int\limits_{0}^{2}4(x-x^3)dx$; 3) $\int\limits_{1}^{4}(4x-\frac{2}{\sqrt{x}})dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{5x^7-4x^6+2x}{x^3}dx$; 5) $\int\limits_{2}^{3}\frac{(x^2+x-6)(2x+3)}{x+2}dx$;

2. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int\limits_{4}^{5}(4-x)^3dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}}\frac{dx}{\cos^2 3x}$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{n}{2}}\sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$;

4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$; 5) $\int\limits_{0}^{1}e^{x^2}xdx$;

3.Вычислить методом интегрирования по частям:

1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin xdx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx$;

Вариант 4

1. Вычислить методом непосредственного интегрирования:

$$1)\ \int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad 2)\ \int_{-2}^{0} 2(x^3-x)dx; \qquad 3)\ \int_{4}^{9} (x^2-\sqrt{x})dx$$

$$4)\ \int_{-2}^{-1} \frac{3x^6-4x^5-7x^4+3}{x^3}dx; \quad 5)\ \int_{-1}^{1} \frac{(x^2-7x+12)(3x-5)}{x-3}dx;$$

2. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

$$1)\ \int_{-1}^{2} \left(x^2-1\right)^3 xdx; 2)\ \int_{\frac{n}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\sin^2 3x}dx; \qquad 3)\ \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\sin xdx;$$

$$4)\ \int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{x}{x^2-1}dx; \qquad 5)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 x\cdot\cos x\, dx;$$

3.Вычислить методом интегрирования по частям:

$$1)\ \int_{0}^{1} \arcsin xdx; \qquad 2)\ \int_{0}^{1} xe^{-x}dx;$$

Контрольные вопросы

1. Что называется определенным интегралом, и в чем его геометрический смысл?
2. Назовите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Перечислите свойства определенного интеграла.
4. В чем заключается метод непосредственного интегрирования?
5. В чем заключается метод замены переменной интегрирования?

Практическая работа № 15

«Решение дифференциальных уравнений первого порядка»

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- решать дифференциальные уравнения.

знать:

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Определение дифференциального уравнения 1-го порядка. Общее и частное решение

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

т.е. содержит независимую переменную *x,* искомую функцию *y(x)* и её производную *y′(x)*. Разрешая уравнение (1), если это возможно, относительно производной *y′* получим

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

Иногда уравнения (1), (2) записывают в дифференциалах:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (3)$$

Дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений. Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его ***частным решением.*** Для многих дифференциальных уравнений первого порядка *общее решение* можно задать формулой вида:

$$y = y(x, C) \qquad (4)$$

где *C* - произвольная постоянная такая, что при любом *C* функция (4) является частным решением дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых ***интегральными кривыми***, а каждое частное решение представляет собой отдельную интегральную кривую. Иногда не удаётся получить решения дифференциального уравнения в явной форме, т.е в виде
y = y(x, C), а получают их в неявной форме, т.е. решение задаётся формулой вида:

$$\Phi(y, x, C) = 0 \qquad (5)$$

Выражение типа *Ф (x, y, C) = 0* в этом случае называют ***интегралом*** (***частным***, ***общим***) дифференциального уравнения.

Задача Коши

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение *y = y(x)* уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y$, где x_0, y_0 - заданные числа. Задача Коши кратко записывается так:

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y = y_0 \quad при\ x = x_0. \end{cases} \qquad (6)$$

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y\ (x_0) = y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0\ ;\ y_0)$.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (2) называется ***уравнением с разделяющимися переменными,*** если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad (7)$$

В предположении, что $f_2(y) \neq 0$, уравнение с разделяющимися переменными (7) можно переписать в виде (разделить переменные):

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \qquad (8)$$

Уравнение вида (8) называется ***уравнением с разделёнными переменными***.

Теорема 1. Если существуют интегралы $\int \frac{dx}{f_2(y)}$ и $\int f_1(x)dx.$, то общий интеграл уравнения с разделёнными переменными (8) задаётся уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C\,, \qquad (9)$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ - некоторые первообразные соответственно функций $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные (с учётом условий, когда это можно делать);
2) проинтегрировать почленно полученное уравнение с разделёнными переменными;
3) найти его общий интеграл уравнения;
4) выяснить, имеет ли уравнение (5) решения, не получающиеся из общего интеграла;
4) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (в случае задачи Коши).

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $g(x,y)$ называется ***однородной функцией к-то измерения*** (к-й степени), если при любом t (кроме, быть может, t=0) имеет место тождество:

$$g(tx,ty) = t^k g(x,y)\,. \qquad (10)$$

Например, $g(x,y) = 2x^3 - 5xy^2$ - однородная функция третьего измерения, так как

$$g(tx,ty) = 2(tx)^3 - 5tx(ty)^2 = t^3(2x^3 - 5xy^2) = t^3 g(x,y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется ***однородным,*** если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения. Его можно представить в виде

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (11)$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Однородное дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными подстановкой:

$$y=zx \qquad (12)$$

где $z=z(x)$ – новая неизвестная функция.

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+f(x)+\varphi(x)=0 \qquad (13)$$

где $f(x)$ и $\varphi\ (x)$-функции от x, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*** В частном случае $f(x)$ и $\varphi\ (x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки^

$$y = uv, \qquad (14)$$

где u и v - новые функции от x.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Найти частное решение уравнения:

$$\begin{cases} 2yy' = 1 - 3x^2; \\ y_0 = 3 \quad \text{при} \quad x_0 = 0; \end{cases}$$

Решение: это уравнение с разделяющимися переменными. Представим его в дифференциалах. Учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$, получим: $2y\frac{dy}{dx}=1-3x^2$. Разделим переменные: $2ydy=(1-3x^2)dx.$

Интегрируя обе части последнего равенства, найдём $\int 2ydy=\int(1-3x^2)dx,$ т.е. $y^2=x-x^3+C.$

Подставив начальные значения $x_0=1,\ y_0=3,$

найдём C: $9=1-1+C,$ т.е. $C=9.$ Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2=x---x^3+9,$ или $x^3+y^2-x-9=0.$

Пример 2. Найти решение уравнения $(x^2-2y^2)dx + 2xy\ dy = 0.$

Решение: В данном уравнении функции $P(x,y) = x^2 - 2y^2$, $Q(x,y) = 2xy$ – однородные функции второго измерения, следовательно, данное уравнение является однородным. Положим $y = zx$, откуда $dy = zdx + xdz$. Подставляем эти выражения y и dy в данное уравнение:

$x^2\,dx - 2(zx)^2\,dx + 2xzx(zdx + xdz) = 0,$ т.е $x^2\,dx - 2z^2x^2\,dx + 2z^2\,x^2\,dx + 2zx^3dz = 0,$

или $dx + 2zx\,dz = 0$. Разделяем переменные (считая $x \neq 0$): $2zdz + \frac{dx}{x} = 0.$

Интегрируем почленно это уравнение (учитывая, что $z = z(x)$): $\int 2zdz + \int \frac{dx}{x} = C_1$,

откуда $z^2 + \ln|x| = \ln|C|$, откуда, после потенцирования получим: $x = Ce^{-z^2}$.

Возвращаясь к прежней функции y $(z = \frac{y}{x})$, находим общий интеграл $x = Ce^{-\frac{y^2}{x^2}}$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $\begin{cases} 2xyy' = x^2 + y^2 \\ y = 2, \ при\ x = 1 \end{cases}$

Решение: запишем данное уравнение в виде $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$. Легко можно убедиться в том, что оно однородно. Положим $y = zx$, откуда $dy = zdx + xdz$. Подставляя значения y и dy в уравнение, имеем (при $x \neq 0$, $1 - z^2 \neq 0$) :

$$(x^2 + z^2x^2)dx - 2xzx(zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow (1 - z^2)dx = 2xzdz \Leftrightarrow \frac{2zdz}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем $-\ln|1 - z^2| = \ln|x| - \ln|C|, C \neq 0,$ или $\ln|x| + \ln|1 - z^2| = \ln|C|,$

откуда $x(1-z^2) = C$, или $x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C.$ Подставив в найденное решение начальные

условия, найдём $1\left(1 - \frac{2^2}{1^2}\right) = C$. $т.е$ $C = -3.$ Итак, искомое частное решение будет

$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = -3,$ *или* $x^2 - y^2 + 3x = 0.$

Пример 4. Найти общее решение уравнения: $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

Решение: это линейное уравнение: здесь $f(x) = -2/(x+1)$, $\varphi(x) = -(x+1)^3$. Положим $y=uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставив теперь выражения для y и y' в данное уравнение, получим

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3;$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x+1}\right) = (x+1)^3 \qquad (*)$$

Так как одну из вспомогательных функций u или v можно выбрать произвольно, то в качестве v возьмем одно из частных решений уравнения

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0 \quad \text{или} \qquad \frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1} = 0 \ /$$

Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}; \qquad \int \frac{dv}{dx} = 2\int \frac{dx}{x+1}; \qquad \ln v = 2\ln(x+1); \qquad v = (x+1)^2$$

(произвольную постоянную C принимаем равной нулю, так как находим одно из частных решений). Подставим теперь выражение для v в уравнение (*); тогда получим

уравнение $u'v = (x+1)^2$; $\frac{du}{dx} \cdot (x+1)^2 = (x+1)^3$ или $\frac{du}{dx} = x+1$. Отсюда находим

$$\int du = \int (x+1)dx; \qquad u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Зная u и v, теперь получаем общее решение данного уравнения:

$$y = uv = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C \right)(x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

Пример 5. Найти частное решение уравнения $\begin{cases} \cos x dy + y \sin x dx = dx; \\ y = 1 \quad при \;\; x = 0 \end{cases}$

Решение: разделив все члены данного уравнения на *cos xdx*, получим уравнение^

$$\frac{dy}{dx} + ytgx = \frac{1}{\cos x}$$

которое является линейным. Положим $y = uv$; тогда $y' = u'v + uv'$

Подставив выражения для y и y' в уравнение (*), имеем

$$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x}$$

или

$$u'v + u(v' + vtgx) = \frac{1}{\cos x}. \qquad (*)$$

Для отыскания получаем уравнение v

$$v' + vtgx = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -vtgx; \quad \frac{dv}{v} = -tgxdx$$

откуда

$$\int \frac{dv}{v} = -\int tgxdx; \quad \ln v = \ln\cos x; \quad v = \cos x$$

Подставляя выражение для v в уравнение (*), имеем

$$u'cosx = \frac{1}{\cos x}; \quad или \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad т.е. \quad u = tgx + C$$

Следовательно, общее решение данного уравнения записывается так:

$$y = uv = (tgx + C)\cos x = \sin x + C\cos x$$

Используя начальные условия *y=1, x=0*, имеем

$$1 = \sin 0 + C\cos 0; \quad т.е. \ C = 1$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \sin x + \cos x$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $(x+1)ydx = dy$.

2. Найти решение задачи Коши: $\begin{cases} x^2dy = y^2dx \\ y = 0,25 \quad при \quad x = 0,1 \end{cases}$.

3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $(x+y)dy + ydx = 0$.

4. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения: $\begin{cases} (x-y)dx + xdy = 0 \\ y = 0 \quad при \quad x = 1 \end{cases}$.

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y' + 4\frac{y}{x} + x = 0$$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$y'(1-x^2)=xy+1, \qquad y(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2}{3}\Pi$$

Вариант 2

1.Найти общее решение дифференциального уравнения: $2xdx=3y^2dy$

2.Найти решение задачи Коши: $\begin{cases} \dfrac{dy}{3x}-\dfrac{dx}{2y}=0 \\ y=5 \quad при \quad x=4 \end{cases}$

3.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения: $xydx-\left(x^2+y^2\right)dy=0$

4.Найти частное решение однородного дифференциального уравнения: $\begin{cases} xy^2y' =x^3+y^3 \\ y=3 \quad при \quad x=1 \end{cases}$

5.Найти общее решение линейного дифференциального уравнения:

$$x^2y'+2xy-1=0$$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$y'+3y=e^{2x};\, y(0)=\frac{3}{5}$$

Вариант 3

1.Найти общее решение дифференциального уравнения $x^3dy-y^3dx=0$;

2.Найти решение задачи Коши: $\begin{cases} y' =\dfrac{y}{2\sqrt{x}} \\ y=e^2 при \quad x=9 \end{cases}$;

3.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения: $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$;

4.Найти частное решение однородного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} y^2dx+\left(x^2-xy\right)dy=0 \\ y=1, если \quad x=1 \end{cases};$$

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения:

$$y'-7y=8e^{3x}$$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2, \qquad y(3)=40$$

Вариант 4

1.Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = x^2 y - x^2$;

2.Найти решение задачи Коши: $\begin{cases} y'\sqrt{x} = 1 + y^2 \\ y = 0 \quad при \quad x = 4 \end{cases}$;

3.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$x^3 y' = y\left(y^2 + x^2\right);$$

4.Найти частное решение однородного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} x^2 y' = xy + y^2 \\ y = 1, если \quad x = 1 \end{cases}$$

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения:

$$(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x$$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{xdy}{dx} - y = x^2 \sin x; \qquad y(\frac{\Pi}{2}) = \Pi$$

Контрольные вопросы

1.Что называется дифференциальным уравнением первого порядка?
2. Что такое общее и частное решения дифференциального уравнения первого порядка?
3. Как ставится задача Коши первого порядка?
4. Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются уравнениями с разделяющимися переменными и как они решаются?
5. Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются однородными и как они решаются?
6.Дайте определение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка и опишите алгоритм решения;

Практическая работа 16 «Уравнения с разделяющимися переменными. Однородное дифференциальное уравнение».

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

<u>уметь:</u>

- решать дифференциальные уравнения.

<u>знать:</u>

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае записывается в виде:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (1)$$

или, если это возможно, в разрешённом относительно y'' виде

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

Говорят, что формула $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ представляет ***общее решение*** дифференциального уравнения второго порядка (1) или (2), если для любых значений C_1' и C_2' постоянных C_1 и C_2 функция $\varphi(x, C_1', C_2')$ является решением данного уравнения, и любое его ***частное решение*** может быть получено из формулы $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при некоторых значениях C_1' и C_2'.

Для дифференциальных уравнений второго порядка ***задача Коши*** формулируется следующим образом: найти решение *y = y(x)* уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ или, в другой записи,

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'. \end{cases} \qquad (3)$$

где x_0, y_0, y_0' - заданные числа. Геометрически общее решение уравнения (1) или (2) представляет собой семейство интегральных кривых, а решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0;\, y_0)$ в данном направлении – угловой коэффициент касательной к интегральной кривой (графику решения *y = y(x)*), проведённой в точке $(x_0; y_0)$ равен данному числу y_0'. Простейшее уравнение второго порядка имеет вид:

$$y'' = f(x). \qquad (4)$$

Уравнения этого вида называются уравнениями, допускающими понижение порядка и решаются двукратным интегрированием: полагаем $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'$ и уравнение (4) принимает вид $p' = f(x)$, или $dp=f(x)\,dx$. Отсюда $p = \int f(x)dx = F(x) + C_1$, где $F(x)$ – одна из первообразных для функции f(x). Так как $p = y'$,то $y' = F(x) + C_1$ или $dy = (F(x) + C_1)dx$. Отсюда, интегрируя ещё раз, находим, как нетрудно проверить, общее решение уравнения (4) (в области, где существуют рассматриваемые интегралы):

$$y = \int F(x)dx + C_1 x + C_2 .$$

Уравнение вида $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, (5)

где a_0, a_1, a_2 - действительные числа $(a_0 \neq 0)$, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.Чтобы решить уравнение (5), нужно решить характеристическое уравнение:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (6)$$

При решении характеристического уравнения (6) возможны три случая, в зависимости от которых строится общее решение данного дифференциального уравнения (5)

Корни уравнения (6)	Частные решения уравнения (5)	Общее решение уравнения (5)
Действительные и различные: $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Равные: $k_1 = k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = x e^{k_1 x}$	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
Комплексно сопряжённые: $\alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$; $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' = \cos 2x$.

Решение: положим $y' = p(x)$; тогда $y'' = p'$, и, следовательно, $p' = \cos 2x$ или $dp = \cos 2x$.

Интегрируя это уравнение, находим: $p=\frac{1}{2}\sin 2x+C_1$, или

$y'=\frac{1}{2}\sin 2x+C_1$, *т.е.* $dy=\frac{1}{2}\sin 2xdx+C_1dx.$

Интегрируя второй раз, находим общее решение: $\int dy=\int\frac{1}{2}\sin 2xdx+C_1\int dx$, т.е.

$y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2$.

Пример 2. Дана задача Коши: $\begin{cases} y''=\dfrac{3}{\sqrt{x}}; \\ y=4,\ y'=14\ \ \textit{при}\ \ x=4. \end{cases}$

Решение: Положим $p=y'$, тогда $y''=p'$ и получим следующее уравнение:

$p'=3x^{-\frac{1}{2}}$ или $dp=3x^{-\frac{1}{2}}dx$. Интегрируя, получим: $p=y'=6x^{\frac{1}{2}}+C_1$.

Так как $y'=\frac{dy}{dx}$, то получим следующее: $\frac{dy}{dx}=6x^{\frac{1}{2}}+C_1$ или $dy=(6x^{\frac{1}{2}}+C_1)dx$.

Интегрируя почленно, получим $y=4\sqrt{x^3}+C_1x+C_2$ - общее решение. Наложим начальные условия. Тогда $y(4)=4\cdot 4^{\frac{3}{2}}+C_1\cdot 4+C_2=4$ $\quad y'(4)=6\cdot 4^{\frac{1}{2}}+C_1=14$

Отсюда имеем, что $C_1=2,\quad C_2=-36$. Значит, частное решение следующее:

$y=4\sqrt{x^3}+2x-36.$

Пример 3. Найти общее решение уравнений: а) $y''-y'-2y=0$; б) $y''+6y'+9y=0$;

Решение:

а) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2-\kappa-2=0$.

Его корни $\kappa_1=2$ и $\kappa_2=-1$. Значит, общее решение уравнения имеет вид $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$.

б) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2-6\kappa+9=0$.

Его корни $\kappa_1=\kappa_2=-3$. Тогда общее решение имеет вид $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$.

Пример 4. Найти решение задачи Коши: $y''-4y'+5y=0$, $y(0)=6,\ y'(0)=15$

Решение: составим характеристическое уравнение: $\kappa^2-4\kappa+5=0$. Решая его, получим $D=-4$ и комплексно сопряжённые корни $k_1=2-i$ и $k_2=2+i$. Тогда его общим решением будет

$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Подставим начальное условие: $y(0)=e^{2\cdot 0}(C_1\cos 0+C_2\sin 0)=C_1=6$. Вычислим производную $y'=2e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{2x}(-C_1\sin x+C_2\cos x)$. Подставим начальное условие $y'(0)=2e^{2\cdot 0}(C_1\cos 0+C_2\sin 0)+e^{2\cdot 0}(-C_1\sin 0+C_2\cos 0)=2C_1+C_2=2\cdot 6+C_2=15$. Откуда имеем $C_2=3,\ \Rightarrow y=e^{2x}(6\cos x+3\sin x)$ - частное решение.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1.Найти общее решение дифференциального уравнения *:* $y''=\dfrac{1}{x^2}$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y''=\sin x; \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi,\ \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2. \end{cases}$

3. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a(t)=12t-1$ (ускорение - *м/с*^{2}, время - *сек*). Начальное положение тела $x(0)=0$ и начальная скорость $v(0)=10\,м/с$. Найти закон движения тела и путь, пройденный за 3 секунды;

4. Найти общее дифференциального уравнения: $y''-2y'+5y=0$.

5 .Решить задачу Коши: $\begin{cases} y''-10y'+16y=0; \\ y=4;\ y'=26,\quad при\quad x=0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y''-8y'+20y=0; \\ y=2;\ y'=8,\quad при\quad x=0. \end{cases}$

Вариант 2

1.Найти общее решение дифференциального уравнения : $y''=x^2+1$

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y''=-3\cos x; \\ y(\pi)=5\pi,\ y'(\pi)=5. \end{cases}$

3. Из семейства интегральных кривых уравнения $y''=12x^2$ выделить ту, которая в точке (1; 1) имеет касательную с угловым коэффициентом, равным 4;

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y''-10y'+9y=0$.

5.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = 0; \\ y = 3, y' = -9, \text{ при } x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 6y' + 25y = 0; \\ y = 2; y' = 10, \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$

Вариант 3

1.Найти общее решение дифференциального уравнения : $y'' = \sin x + 1$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \\ y(1) = \dfrac{2}{3}; y'(1) = 2. \end{cases}$

3. Из семейства интегральных кривых уравнения $y'' = 6(1-x)$ выделить ту, которая в точке (1; 5) имеет касательную с углом наклона к оси OX, равным $\dfrac{\pi}{4}$.

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 7y' + 12y = 0$.

5.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 4y' - 32y = 0; \\ y = 8, y' = -4, \text{ при } x = 0. \end{cases}$

6.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 8y' + 25y = 0; \\ y = 5; y' = 4, \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$

Вариант 4

1.Найти общее решение дифференциального уравнения : $y'' = 60x^2 - 4x + 2$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = x^3 + 3; \\ y(1) = -2{,}45; \; y'(1) = 2{,}25. \end{cases}$

3. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a(t) = 6t - 4$ (ускорение - *м/с^2*, время - *сек*). Найти закон движения тела и путь, пройденный за 5 секунд; если через 2 секунды после начала движения $v = 6 м/с$, $s = 5 м$;

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 9y = 0.$

5.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 3y' - 10y = 0; \\ y = 2,\ y' = -3,\ при \quad x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 4y' + 20y = 0; \\ y = 3;\ y' = 2, \quad при \quad x = 0. \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Назовите общий вид дифференциальных уравнений второго порядка.
2. Как решается дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение степени?
3. Что такое обшее и частное решения дифференциального уравнения второго порядка?
4. Сформулируйте задачу Коши второго порядка.
5. Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка?
6. Как составить характеристическое уравнение? Какие варианты решений дифференциального уравнения возможны?

Содержание работы: тест с самопроверкой.

1). Предел функции – это…

1.Число 2.Переменная величина x 3.

2). В результате вычисления предела ——— получится:

1. 0 2. 3. 6 4. 5.

3). Производная функции y = tgx равна:

1. cos x 2. –sinx 3. 4. 5. sin x

4). Физический смысл первой производной:

1. скорость 2 сила 3 ускорение

5). Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = -0,5x^2$ в точке Xo = -3

1. 0 2. -3 3. -4,5 4. 3

6). Вычислить:

1. $x^2 - x^3 + \_$ 2. $x^2 - x^3 + \_$ +C

3. 2 – 6x -

7). Площадь криволинейной трапеции можно найти с помощью…

1. Производной 2. Неопределенного интеграла
3. Предела функции 4. Определенного интеграла

8). Дополните предложение:

Матрица, называется …, если у нее количество строк равно числу столбцов.

9). Сумма матриц и , равна

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

10). Произведение двух матриц , равно

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

11). Определитель третьего порядка , равен

1) 11; 2) -11; 3) -13; 4) -12.

12). Назовите вид операции над множествами A \ B:

1. Объединение 2.Пересечение

3. Разность 4.Симметричная разность

13). Комплексные числа называются равными, если равны их

1) мнимые части; 2) действительные части;

3) действительные и мнимые части; 4) другой ответ.

14). Установите последовательность этапов получения тригонометрической формы комплексного числа из алгебраической:

1. Определить, в какой четверти находится точка
2. Записать число в тригонометрической форме, используя формулу: .
3. Найти модуль комплексного числа по формуле

; и . –

4. Найти в этой четверти угол , решив уравнения –

15). Вычислите:

1) -16;
2) 17;
3) -17;
4) 16.

Критерии выставления оценок за тест:

Оценка «5» - 14-15 правильных ответов,

«4» - 10-13 правильных ответов

«3» - 8-9 правильных ответов

«2» - менее 8 правильных ответов.

Ответы к тесту для самопроверки.

вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
№ ответа	1	3	3	1	4	2	4	квадратной	1	2	3	3	3	3142	4

Вариант	m	n	Вариант	m	n	Вариант	m	n
1	3	4	10	7	3	19	9	6
2	4	5	11	3	6	20	3	7
3	6	7	12	4	7	21	5	7
4	8	9	13	5	8	22	6	8
5	6	4	14	4	6	23	3	9
6	4	3	15	7	5	24	8	3
7	5	4	16	6	3	25	9	4
8	7	6	17	7	4			

9	9	8	18	8	5			

Вопросы для подготовки к дифференцированному зачёту по дисциплине

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

1. Определение производной. Правила дифференцирования.

2. Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

3. Геометрический и физический смысл производной.

4. Комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

5. Производная сложной функции.

6. Действия с комплексными числами в алгебраической форме.

7. Производные высших степеней.

8. Решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел на примере уравнения.

9. Первообразная функции. Основное свойство первообразной.

10. Модуль комплексного числа. Сложение и вычитание комплексных чисел в геометрической форме.

11. Неопределенный интеграл. Правила интегрирования.

12. Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница.

13 Свойства определенного интеграла.

14 Матрица. Виды матриц. Транспонирование матрицы. Обратная матрица.

15. Площадь криволинейной трапеции.

16. Действия над матрицами.

17. Квадратная матрица. Определитель матрицы.

18. Уравнение касательной к графику функции в данной точке. Пример: записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, $x_0 = 2$.

19. Методы решения системы линейных уравнений.

20. Применение производной для решения задач.

21. Формулы Крамера для решения системы уравнений.

22. Применение производной для определения промежутков монотонности функции.

23. Метод Гаусса для решения системы линейных уравнений.

24. Применение производной для определения точек экстремума функции.

25. Различные формы комплексных чисел.

26. Полное исследование функции с помощью производной на примере функции у = $x^3/(x^2-1)$.

29. Правило нахождения производной сложной функции на примере: а) у = $\sin 2x^3$; б) $y = (8x^3 – 7x^2 + 6x - 4)^4$.

30. Нахождение производных высших степеней на примере функции: у = x lnx.

31. Условие монотонности функции.

32. Нахождение определенного интеграла на примере: $\int_1^2 (3x^2 + 4x + 5)dx$

33. Необходимое и достаточное условие экстремума функции.

34. Вычисление определителя матрицы 2х2 и 3х3.

35. Универсальный способ вычисления определителя матриц.

36. Методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод замены переменной (метод подстановки); метод интегрирования по частям.

37. Производная суммы, произведения и частного функции.

38. Правила нахождения площади фи гуры, ограниченной графиками функций у = $f_1(x)$ и у = $f_2(x)$. Пример.

39. Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

40. Правила дифференцирования на примерах.

41. Геометрический и физический смысл производной.

42. Комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

43. Производная сложной функции.

44. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

45. Производная высших степеней.

46. Решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел на примере уравнения $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7z = 0$.

47. Первообразная функции. Основное свойство первообразной.

48. Модуль комплексного числа. Сложение и вычитание комплексных чисел в геометрической форме.

49. Неопределенный интеграл. Правила интегрирования.

50. Расчет вероятности случайного события. Привести примеры.

Практическая часть

1. Найти производную третьего порядка функции $y \,|\,|\, 5x^4 \,|\,|\, \cos 4x$.

2. Материальная точка движется по закону $x(t) \,|\,|\, \frac{1}{3} t^3 \,|\,|\, 2t^2 \,|\,|\, 5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

3. Исследовать функцию и построить ее график.

$f(x) \,|\,|\, x^2 \,|\,|\, 2x \,|\,|\, 8$.

$f(x) \,|\,|\, x^3 \,|\,|\, 3x \,|\,|\, 2$.

4. Найти производную функции в точке $y = x^2 + 3x + 19$, $x = 5$.

5. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования.

1. $\mid\mid^{\mid\mid} 5\cos x \mid\mid 3x^2 \mid\mid ^{1\,\mid\mid}$.

$\mid\mid \qquad\qquad \mid\mid dx$

$\mid\mid \qquad\qquad x \mid\mid$

6. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$\mid\mid x_1 \mid\mid 3x_2 \mid\mid 2x_3 \mid\mid 4,$

$\mid\mid x \mid\mid 4x \mid\mid x \mid\mid 7,$

$\mid\mid \; 1 \quad 2 \quad 3$

$\mid\mid 2x \mid\mid x \mid\mid x \mid\mid 3.$

$\mid\mid \; 1 \quad 2 \quad 3$

7. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$\mid\mid x_1 \mid\mid x_2 \mid\mid x_3 \mid\mid 3,$

$\mid\mid 2x \mid\mid x \mid\mid x \mid\mid 1,$

$\mid\mid_2 \; 1 \quad 2 \qquad \mid\mid 1.$

$x \qquad\quad 3$

$\mid\mid\mid\mid x \; 3x$

$\mid\mid \; 1 \quad 2 \quad 3$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+2)^2}$$

8.Вычислите:

9. Найти матрицу $C=4A-B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Найти корни уравнения $z^2 + 3z + 3 = 0$ на множестве комплексных чисел.

$\int_0^{\pi/3} \cos 0{,}5x\,dx$

11. Вычислить:

12. Найти производную третьего порядка функции $y \mid\mid 2x^5 \mid\mid \sin 3x$.

13. Выполнить действия над комплексными числами

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$; г) z_1^2.

14. Найти S фигуры, ограниченной кривыми а) $y = x^3$, $y=x^2$ и прямыми $x=-1$ и $x=1$.

. б) ограниченной линиями $y= x^2$, $y =1/x$, $x=0$, $x=3$.

15. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык: 6 человек знают английский, 7 – французский, 6 – немецкий, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе?

16. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу извлеченный шар окажется белым?

17. Найти определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & & -2 \end{vmatrix}$

3

18. Записать уравнение касательной к графи ку функции $y = x^2 - 2x + 7$ в т. $x_1 = 0,5$ и $x_2 = 1$.

19. Материальная точка движется по закону