	МИНОБРНАУКИ РОССИИ
	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Владивостокский государственный университет экономики и сервиса»

ОБНОВЛЕНО
для набора 2019 г.
Зам. директора по УР
О.А. Улитина
2020 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

54.02.01 Дизайн (по отраслям)

Базовый уровень подготовки

Очная форма обучения

Уссурийск 2020

Рабочая программа разработана на основе Федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования программы подготовки специалистов среднего звена 54.02.01 Дизайн (по отраслям), утвержденного приказом Министерства образования и науки Р.Ф. от 27 октября 2014 г. № 1391.

Разработана:

Онохова Н.Б., преподаватель филиала ФГБОУ ВО «ВГУЭС» в г. Уссурийске

Рассмотрена на заседании ЦМК экономических, математических и общих естественнонаучных и правовых дисциплин
Протокол № 8 от «16» апреля 2021 г.
Председатель ЦМК ____________ Басалюк Т.Г.

Содержание

1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ «МАТЕМАТИКА»

1.1 Место дисциплины в структуре ППССЗ

Учебная дисциплина «Математика» принадлежит к циклу математических и общих естественнонаучных учебных дисциплин.

1.2 Требования к результатам освоения учебной дисциплины

Базовая часть

С целью реализации требований работодателей и ориентации профессиональной подготовки под конкретное рабочее место, обучающийся в рамках овладения указанным видом профессиональной деятельности должен:

В результате освоения дисциплины студент должен

уметь:

применять математические методы для решения профессиональных задач;

использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

знать:

основные понятия и методы математического синтеза и анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики.

Вариативная часть – не предусмотрено

Содержание дисциплины должно быть ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей ОПОП по специальности СПО 54.02.01 Дизайн (по отраслям)и овладению профессиональными компетенциями (ПК):

ПК 1.3. Производить расчеты технико-экономического обоснования предлагаемого проекта.

ПК 1.5. Выполнять эскизы с использованием различных графических средств и приемов.

ПК 2.3. Разрабатывать конструкцию изделия с учетом технологии изготовления, выполнять технические чертежи.

В процессе освоения дисциплины у студентов должны формировать общие компетенции (ОК):

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе, обеспечивать его сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.
ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

1.3 Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной деятельности	Объем часов
Максимальная учебная нагрузка (всего)	108
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	72
В том числе:	
лабораторные занятия	не предусмотрено
практические занятия	28
контрольные работы	1
Самостоятельная работа студента (всего)	36
В том числе:	
курсовая работа (проект)	не предусмотрено
другие виды самостоятельной работы	36
Итоговая аттестация в форме	*Дифференцированный зачет*

2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА»

2.1 Тематический план и содержание

Наименование разделов и тем		Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся.	Объем часов	Уровень освоения
Введение		Значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы.	1	1
Раздел 1 Линейная алгебра			**30(10)/10**	
Тема 1.1 Матрицы и определители		Содержание учебного материала	2	
	1	Понятие матрицы. Типы матриц. Действия с матрицами: транспонирование матриц, сложение, вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц		2
	2	Определители 1-го, 2-го, 3-го порядков. Правило Сарруса. Миноры и алгебраические дополнения. Обратная матрица. Алгоритм обращения матриц	2	2
		Лабораторные работы	не предусмотрено	
		Практические работы №1 «Операции над матрицами»	2	
		Практические работы №2 «Составление обратной матрицы»	2	
		Контрольные работы	не предусмотрено	
		Самостоятельная работа обучающихся: Подготовка докладов о роли математики в дизайне. Вычисление определителей.	4	
Тема 1.2 Системы линейных уравнений		Содержание учебного материала	2	
	1	Системы линейных уравнений и их решение матричным способом		2
	2	Системы линейных уравнений и их решение по формулам Крамера	2	2
	3	Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса	2	2
		Лабораторные работы	не предусмотрено	

	Практическая работа № 3«Решение систем линейных уравнений матричным способом»		2	
	Практическая работа № 4 «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера»		2	
	Практическая работа № 5 «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»		2	
	Контрольные работы		не предусмотрено	
	Самостоятельная работа обучающихся: Проверка вычислений с помощью табличного процессора MSExcel		6	
Раздел 2 Математический анализ			**41(10)/16**	
Тема 2.1 Пределы и непрерывность	Содержание учебного материала		2	
	1	Понятие предела функции в точке. Вычисление односторонних пределов		2
	2	Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы.	2	2
	Лабораторные работы		не предусмотрено	
	Практическая работа №6 «Вычисление замечательных пределов. Раскрытие неопределенностей»		2	
	Контрольные работы		не предусмотрено	
	Самостоятельная работа обучающихся: Проработка конспекта занятия - повторение пройденного на занятии материала. Подготовка к практической работе		4	
Тема 2.2 Дифференциальные исчисления	Содержание учебного материала		2	
	1	Понятие производной, правила вычисления производной. Производная сложной функции. Производная высших порядков		2
	2	Исследование функции с помощью производной: интервалы монотонности, экстремумы функции, выпуклость графика функции, точки перегиба. Асимптоты графика функции. Исследование функций и построение их графиков	2	2
	Лабораторные работы		не предусмотрено	
	Практическая работа №7 Вычисление производной сложной функции		2	

	Практическая работа №8 Исследование функций и построение их графиков		2	
	Контрольные работы		1	
	Самостоятельная работа обучающихся: Применение производной в экономических расчетах. Техника дифференцирования		6	
Тема 2.3 Интегральное исчисление	Содержание учебного материала		2	
	1	Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойстванеопределенного интеграла. Метод непосредственного интегрирования. Метод замены переменной		2
	2	Неопределенный интеграл. Метод интегрирования по частям.	2	2
	3	Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной	2	2
	Лабораторные работы		не предусмотрено	
	Практическая работа № 9 Интегрирование функции способ замены переменной		2	
	Практическая работа № 10 Интегрирование функции по частям		2	
	Контрольные работы		не предусмотрено	
	Самостоятельная работа обучающихся: Геометрические и физические приложения определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление объема тела		8	
Раздел 3 Дискретная математика			**6(0)/2**	
Тема 3.1 Основные понятия и методы дискретной математики	Содержание учебного материала			
	1	Предмет дискретной математики. Множества и отношения	2	2
	2	Графы	2	2
	Лабораторные работы		не предусмотрено	
	Практическая работа		не предусмотрено	
	Контрольные работы		не предусмотрено	
	Самостоятельная работа обучающихся: Место и роль дискретной математики в системе математических наук и в решении задач,		2	

	связанных с обеспечением информационной безопасности			
Раздел 4 Комплексные числа			**10(2)/4**	
Тема 4.1Основные понятия и методы теории комплексных чисел	Содержание учебного материала		2	
	1	Основные понятия и методы комплексных чисел. Геометрическая интерпретация комплексного числа		2
	2	Действия над комплексными числами. Переход от алгебраической формы к тригонометрической	2	2
	Лабораторные работы		не предусмотрено	
	Практическая работа № 11 Действия над комплексными числами. Переход от алгебраической формы к тригонометрической		2	
	Контрольные работы		не предусмотрено	
	Самостоятельная работа обучающихся: подготовить доклад на тему: «Перспективы использования электронных документов в управленческой деятельности»		4	
Раздел 5 Теория вероятностей и математическая статистика			**12(4)/(4)**	
Тема 5.1 Основные понятия и методы теории вероятности и математической статистики	Содержание учебного материала			
	1	Элементы теории вероятности: размещения, перестановки, сочетания. Формула Ньютона. Случайные события. Вероятность события. Простейшие свойства вероятности.	2	2
	2	Элементы математической статистики.Выборка. Вариационный ряд.	2	2
	Лабораторные работы		не предусмотрено	
	Практическая работа №12Решение задач на вычисление вероятности случайного события и нахождение числовых характеристик дискретной случайной величины		2	
	Практическая работа №13Решение практических задач с применением статистических методов		2	
	Контрольные работы		не предусмотрено	
	Самостоятельная работа обучающихся: Решение простейших задач теории вероятностей и математической статистики		4	

Раздел 6 Решение прикладных задач		**4(2)/0**	
Тема 6.1 Решение прикладных задач	Содержание учебного материала	2	
	1 Простейшие задачи на производство изделий		2
	Лабораторные работы	не предусмотрено	
	Практическая работа №14 Решение транспортных задач в экономике	2	
	Контрольные работы	не предусмотрено	
	Самостоятельная работа обучающихся	не предусмотрено	
Дифференцированный зачёт		2	
Примерная тематика курсовой работы (проекта)		не предусмотрено	
Самостоятельная работа обучающихся над курсовой работой (проектом)		не предусмотрено	
	Всего:	**108**	

3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1 Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Реализация программы дисциплины «Математика» требует наличия учебного кабинета – Математика; лаборатории – не предусмотрено

Оборудование учебного кабинета:

количество посадочных мест - 46, стол для преподавателя 1 шт., стул для преподавателя 1 шт., мультимедийное оборудование 1 шт., доска меловая, стеллаж, дидактические пособия

ПО: Microsoft Windows 7 Professional Russian, ООО "Битроникс Владивосток" Контракт№ 0320100030814000018-45081 от 09.09.14, лицензия №64099496, бессрочно

Оборудование лаборатории и рабочих мест лаборатории: - не предусмотрено

3.2. Информационное обеспечение обучения (перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы)

1. Математика: учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2017. — 401 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/matematika-449006#page/24
2. Математика для экономистов: учебник для среднего профессионального образования / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под редакцией А. М. Попова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2017. — 566 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/matematika-dlya-ekonomistov-430973#page/282
3. Теория вероятностей учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ю. Энатская. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 203 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/teoriya-veroyatnostey-451178#page/1
4. Дискретная математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. Б. Гисин. — Москва: Издательство Юрайт, 2017. — 383 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/matematika-praktikum-449059#page/1

Интернет-ресурсы:

1. www. fcior. edu. ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы)
2. www. school-collection. edu. ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов)

4 КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Контроль и оценка результатов освоения дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения практических занятий и контрольных работ, тестирования, а также выполнения обучающимися индивидуальных заданий, проектов, исследований.

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	**Формы и методы контроля и оценки результатов обучения**
1	2
Умения:	
применять математические методы для решения профессиональных задач;	практические занятия, внеаудиторная самостоятельная работа, дифференцированный зачет
использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях	практические занятия, внеаудиторная самостоятельная работа, дифференцированный зачет
Знания:	
основные понятия и методы математического синтеза и анализа, основные понятия дискретной математики, основные понятия теории вероятностей, основные понятия и методы математической статистики	тестирование, контрольная работа, практические занятия, внеаудиторная самостоятельная работа

Приложение
к рабочей программе дисциплины
«Математика»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА

Филиал ФГБОУ ВО «ВГУЭС» в г Уссурийске

Математика

Фонд оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации обучающихся

54.02.01 Дизайн (по отраслям)

Уссурийск 2020

Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) «Математика» разработан в соответствии с требованиями ФГОС СПО по специальностям гуманитарного профиля и "Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам среднего профессионального образования" (утв. Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) от 14 июня 2013 г. N 464 г. Москва).

Составитель:
Онохова Наталья Борисовна

Утверждена на заседании цикловой методической комиссии общеобразовательных, общих гуманитарных и социально-экономических дисциплин
__________от 16 апреля 2020 г., протокол № 7

Председатель цикловой методической комиссии ______________ Степанова К.В.
подпись фамилия, инициалы

«16» апреля 2020 г.

Председатель цикловой методической комиссии (выпускающей)
______________ Степанова К.В.
Подпись фамилия, инициалы

«16» апреля 2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

№ п/п	Код компетенции	Формулировка компетенции
1.	ОК 1.	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
2.	ОК 2.	Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
3.	ОК 3.	Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.
4.	ОК 4.	Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
5.	ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.
6.	ОК 6.	Работать в коллективе, обеспечивать его сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
7.	ОК 7.	Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.
8.	ОК 8.	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
9.	ОК 9.	Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.
10.	ПК 1.3.	Производить расчеты технико-экономического обоснования предлагаемого проекта.
11.	ПК 1.5.	Выполнять эскизы с использованием различных графических средств и приемов.
12.	ПК 2.3.	Разрабатывать конструкцию изделия с учетом технологии изготовления, выполнять технические чертежи.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

<table>
<tr><th rowspan="2">№ п/п</th><th colspan="2" rowspan="2">Коды компетенций и планируемые результаты обучения</th><th>Оценочные средства*</th></tr>
<tr><th>Наименование</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1.</td><td rowspan="2">ПК 1.3. Производить расчеты технико-экономического обоснования предлагаемого проекта.
ПК 1.5. Выполнять эскизы с использованием различных графических средств и приемов.
ПК 2.3. Разрабатывать конструкцию изделия с учетом технологии изготовления, выполнять технические чертежи.
ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
ОК 3. Решать</td><td>знать:
1) основные понятия и методы математического синтеза и анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики.</td><td>Тест № 1-6 (включая тест на дифференцированный зачет),
Текущий контроль,
Самостоятельные работы №1-6 (Доклад, презентация, краткий конспект, эссе, рисунок)</td></tr>
<tr><td>уметь:
1) применять математические методы для решения профессиональных задач;
2) использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.</td><td>Практические занятия № 1-15
Варианты практических заданий для дифференцированного зачета (1-3)</td></tr>
</table>

	проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях. ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития. ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности. ОК 6. Работать в коллективе, обеспечивать его сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями. ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат		

	выполнения заданий. ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации. ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.		

3 ОПИСАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Промежуточная аттестация по дисциплине «Математика» включает в себя теоретические задания, позволяющие оценить уровень усвоения обучающимися знаний, и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и владений (см. раздел 5).

Усвоенные знания проверяются при помощи электронного тестирования, умения проверяются в ходе выполнения практических заданий.

Объем и качество освоения обучающимися дисциплины, уровень сформированности дисциплинарных компетенций оцениваются по результатам текущих и промежуточной аттестаций.

4 КОМПЛЕКТ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

4.1 ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

4.1.1 Распределение типов контрольных заданий по элементам знаний и умений, контролируемых при текущем контроле и промежуточной аттестации

Содержание учебного материала по программе УД	**Тип контрольного задания (текущий контроль)**				**Тип контрольного задания (промежуточная (итоговая) аттестация)**			
	У1	**У2**	**З1**	**З2**	**У1**	**У2**	**З1**	**З2**
Раздел 1 Линейная алгебра		ПР№1-5	**Т№1, С №1**	**Т№1, С №1**			ВТ 4,12,16	ВТ 4,12,16
Раздел2 Математический анализ		ПР№6-10	**Т№2, Т№3 С №2,3,4**	**Т№2, Т№3 С №2,3,4**			ВТ 1-3,5,6,9,14,19,21-25,27,28,30	ВТ 1-3,5,6,9,14,19,21-25,27,28,30
Раздел 3 Дискретная математика			**Т№4, С №5**	**Т№4, С №5**			ВТ 7,11,15	ВТ 7,11,15
Раздел 4 Комплексные числа		ПР№11	**Т№5, С №6**	**Т№5, С №6**			ВТ 8,10,18,20	ВТ 8,10,18,20
Раздел 5 Теория вероятностей и математическая статистика.		ПР№12,13	**Т№6, С №7**	**Т№6, С №7**			ВТ 17,29,13,26	ВТ 17,29,13,26
Раздел 6 Решение прикладных задач		ПР№14	**С №5**	**С №8**				

ПЗ – практическое занятие
Т- тест
ВТ – вопросы теста
В – Вариант
С – самостоятельная работа

5 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

5.1 ОПЕРАТИВНЫЙ (ТЕКУЩИЙ) КОНТРОЛЬ

Перечень вопросов к собеседованию

1. Матрицы, действия над матрицами.
2. Определители 1-го, 2-го, 3-го порядков. Правило треугольников.
3. Система линейных уравнений. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
4. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах.
5. Предел функции при х, стремящемся к бесконечности. Замечательные пределы. Число е.
6. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точка непрерывности функции. Точка разрыва функции. Свойства непрерывных функций. Приращение аргумента. Приращение функции.
7. Производная функции. Дифференциал функции. Геометрический смысл производной. Механический смысл производной.
8. Таблица производных. Понятие сложной функции. Производная сложной функции.
9. Схема исследования функции. Область определения функции. Множество значений функции. Четность и нечетность функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства функции. Возрастание и убывание функции, правило нахождения промежутков монотонности. Точки экстремума функции, правило нахождения экстремумов функции.
10. Производные высших порядков. Физический смысл второй производной. Исследование функции с помощью второй производной.
11. Первообразная. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
12. Таблица неопределенных интегралов.
13. Методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод замены переменной (метод подстановки); метод интегрирования по частям.
14. Основные свойства определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла.
15. Методы вычисления определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.
16. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.
17. Понятие события. Достоверные, невозможные, совместные, несовместные, противоположные события. Классическое определение вероятности.
18. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей.
19. Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины.
20. Определения операций над высказываниями.
21. Какие комплексные числа называются равными?
22. Какие комплексные числа называются сопряженными?
23. Какие комплексные числа называются противоположными?
24. Как изображаются комплексные числа геометрически?
25. Дайте определение комплексного числа.
26. Как найти аргументы комплексного числа?
27. Перечислите формы записи комплексных чисел.
28. Как выполнить действие над комплексными числами в алгебраической форме?

Критерии оценивания устного ответа

(оценочные средства: *собеседование, дискуссия, опрос)*

5 баллов - ответ показывает прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа; умение приводить примеры современных проблем изучаемой области.

4 балла - ответ, обнаруживающий прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается одна - две неточности в ответе.

3 балла – ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой предметной области, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы; знанием основных вопросов теории; слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры; недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа; неумение привести пример развития ситуации, провести связь с другими аспектами изучаемой области.

2 балла – ответ, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы; незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа явлений, процессов; неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Допускаются серьезные ошибки в содержании ответа; незнание современной проблематики изучаемой области.

Практическая работа № 1
«Операции над матрицами»

Цель работы: научиться выполнять действия над матрицами, вычислять определители.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- выполнять операции над матрицами.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая **m** строк одинаковой длины (или **n** столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно: $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$ (т.е. $i = 1,2,3,...,m$) – номер строки, $j = \overline{1,n}$ (т.е. $j = 1,2,3,...,n$) - номер столбца. Матрицу A называют матрицей ***размера*** $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее ***элементами.*** Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной и обозначается A^T.

Действия над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).Аналогично определяется *разность матриц*.

Умножение вектора на число

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ***на число k*** называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Произведение матриц

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы*. Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p} = (b_{ijk})$ называется матрица $C_{m\times з} = (c_{шл})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}, \text{ где } i = \overline{1,m}, k = \overline{1,p},$$

т. е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.
Тогда произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A (их 3) не совпадает с числом строк матрицы B (их 2). При этом определено произведение $B \times A$, которое считают следующим образом:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$ 3. $(A + B) \cdot C = AC + BC;$

2. $A \cdot (B + C) = AB + AC;$ 4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B,$

Определитель матрицы

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число det A (или $|A|$, или Δ), называемое ее ***определителем,*** следующим образом:

1. $n = 1. A = (a_1); \det A = a_{1.}$
2. $n = 2. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$
3. $n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

Свойства определителей

Если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.
Свойство1. («Элементарные преобразования определителей»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется определитель n - 1-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}. Так если:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}.$$

Свойство 2. («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»).
Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения. В случае определителей 3-го порядка свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Квадратная матрица *A* называется ***невырожденной***, если определитель $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица *A* называется ***вырожденной.***

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, k = 2, A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Пример 4. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27.$

Пример 5. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(4 \times 3 - 2 \times 5) - 2(2 \times 3 - 5 \times 1) + 1(2 \times 2 - 4 \times 1) =$$

$$= 3(12 - 10) - 2(6 - 5) = 6 - 2 = 4$$

Ответ: □=4.

Задания для практического занятия:

Даны матрицы *A* и *B*. Найти:

1. $A+B$, $A-B$
2. $C=2A-3B$
3. AB; BA
4. $\det A$; $\det B$

Вариант 1

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix};$$

Вариант 2

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

Вариант 4

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей? Дать определения основных понятий матрицы;
2. Какая матрица называется квадратной? Единичной?
3. Какие операции можно производить над матрицами?
4. Что такое определитель матрицы? Перечислите его свойства;

Практическая работа № 2

«Составление обратной матрицы»

Цель работы: научиться составлять обратную матрицу.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- получать обратную матрицу из данной.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая **m** строк одинаковой длины (или **n** столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно: $A=(a_{ij})$, где $i=\overline{1,m}$ (т.е. $i=1,2,3,...,m$) – номер строки, $j=\overline{1,n}$ (т.е. $j=1,2,3,...,n$) - номер столбца. Матрицу A называют матрицей ***размера*** $m\times n$ и пишут $A_{m\times n}$.

Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее ***элементами.*** Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной и обозначается A^T.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется определитель n - 1-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}. Так если:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}.$$

Свойство 2. («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»).
Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения. В случае определителей 3-го порядка свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Квадратная матрица *A* называется ***невырожденной***, если определитель $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица *A* называется ***вырожденной.***

Союзная и обратная матрицы

Матрицей ***союзной к матрице*** А называется матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы *A*. Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице *A*, если выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$,
где *E* – единичная матрица того же порядка, что и матрица *A*.

Пусть *A* – невырожденная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & {}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ и } \det A \neq 0.$$

Составим союзную матрицу

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & {}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда $A^{-1}=\dfrac{A^*}{\det A}$, т.е. $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Отметим ***свойства*** обратной матрицы:

1. $\det(\mathrm{A}^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Решение: $\Delta=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=(-4+4)+2(-8+6)+3(4-3)=-1$

Составим союзную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=0$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-(-8+6)=2$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=(4-3)=1$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-(8-6)=-2$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-4-9=-13$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-(2+6)=-8$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-3=1$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-(-2-6)=8$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1+4=5$

Союзная матрица будет следующей: $A^*=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot A^*=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Проверкой $A\cdot A^{-1}=E$ убеждаемся, что обратная матрица найдена верно.

Задания для практического занятия:

Даны матрицы A и B. Найти:

1. A^{-1}, B^{-1}. Проверить правильность их нахождения умножением $A \cdot A^{-1}$ *и* $B \cdot B^{-1}$:

Вариант 1

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix};$$

Вариант 2

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

Вариант 4

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

Контрольные вопросы

1. Что такое определитель матрицы? Перечислите его свойства;
2. Как вычислить минор и алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы А?
3. Как найти союзную и обратную матрицы для матрицы А?

Практическая работа № 3

«Решение систем линейных уравнений матричным способом»

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом обратной матрицы.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

<u>уметь:</u>

- решать системы линейных уравнений.

<u>знать:</u>

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Система линейных уравнений. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей ***m*** уравнений и ***n*** неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где числа a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, называются ***коэффициентами системы***, числа b_j - ***свободными членами.*** Подлежат нахождению числа x_i, *где* $i=\overline{0,n}$. Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме:***

$$A \cdot X = B, \qquad (2)$$

здесь *A* – матрица коэффициентов системы, называемая ***основной матрицей***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор - столбец из неизвестных } x_j$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} - \text{вектор - столбец из свободных членов } b_j \qquad (3)$$

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$, дополненная столбцом членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{2n}b_2 \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn}b_m \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется ***определенной,*** если она имеет единственное решение, и ***неопределенной,*** если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется ***частным решением системы.*** Совокупность всех частных решений называется ***общим решением. Решить систему*** – это значит выяснить, совместна она или не совместна и если система совместна, значит найти ее общее значение.

Две системы называются ***эквивалентными*** (равносильными), если они имеют одно и то же решение. Эквивалентные системы чаще всего получаются, в частности, при ***элементарных преобразованиях системы*** при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Решение систем методом обратных матриц

Пусть дана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (5)$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$. Основная матрица A такойсистемы квадратная. Определитель этой матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}.......a_{1n} \\ .... \\ a_{n1}.......a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется ***главным определителем системы.*** Если определитель системы отличен от нуля, то система называется ***невырожденной.*** Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$

Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (6)$$

Отыскание решения системы по формуле (1) называют ***методом обратных матриц*** решения системы.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Решить систему уравнений методом обратных матриц:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 11. \end{cases}$$

Решение: $\Delta = \begin{pmatrix} 1 - 2 & 3 \\ 2 \quad 1 & -2 \\ 3 \quad 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4+4) + 2(-8+6) + 3(4-3) = -1$

Составим союзную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8+6) = 2$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4-9 = -13$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2+6) = -8$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5$

Союзная матрица будет следующей: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы по формуле (6):

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, решением системы будет тройка чисел (1; 2; -1)

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \\ 3x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 13; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$

Вариант 2

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 11; \\ 5x_2 + 6x_3 = 28; \\ x_1 + 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_2 - 5x_3 = -9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

Вариант 3

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14; \\ 3x - y + 2z = 5; \\ x + 2y - z = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 10; \\ -2x_2 - x_3 = -4; \\ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

Вариант 4

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10; \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12; \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Укажите общий вид системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными;
2. Что значит решить систему уравнений? Дать определение общего и частного решений;
3. Опишите метод обратных матриц решения систем линейных уравнений.

Практическая работа № 4

«Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера»

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- решать системы линейных уравнений.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Метод Крамера решения систем линейных уравнений

Матричное равенство $X = A^{-1} \cdot B.$ запишем в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \ldots\ A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}\ A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Отсюда следует, что $x_1 = \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta}$

$$x_2 = \frac{A_{112}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n}{\Delta}$$

$$.. \qquad (9)$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} ... a_{1n} \\ b_2 a_{22} ... a_{2n} \\ .... \\ b_n a_{n2} ... a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом свободных членов. Итак, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом свободных членов, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$. Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1, n} \qquad (10)$$

называются ***формулами Крамера***.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 2\cdot 4 + 5\cdot(-2)\cdot(-2) - 4\cdot(-3)\cdot(-2) - 5\cdot 1\cdot(-3) - (-2)\cdot 2\cdot 3 = 27 + 8 + 20 - 24 + 15 + 12 = 58.$$

Так как главный определитель системы не равен нулю, то она совместна. Находим определители: Δx_1, Δx_2, Δx_3. Определитель Δx_1 получается из главного определителя Δ путём замены в нём первого столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 \\ & & \end{vmatrix} = 54 - 4 - 16 + 12 - 12 + 24 = 58.$$

-2 -2 -3

Т.к. Δx_1 отличен от нуля, значит решение системы единственное. Определитель Δx_2 получается из главного определителя Δ путём замены в нём второго столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 36 + 48 + 20 - 32 + 90 + 12 = 174.$$

Определитель Δx_3 получается из главного определителя Δ путём замены в нём третьего столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 18 - 16 - 60 + 72 + 10 - 24 = 0.$$

По формулам Крамера: $x_1 = x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{58}{58} = 1$; $x_2 = x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{174}{58} = 3$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{58} = 0$.

Итак, решением системы будет тройка чисел (1; 3; 0).

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z - 17 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 14; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 20; \\ 3x - 2y - 5z = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9; \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7. \end{cases}$

Вариант 3

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9; \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10; \\ x + 5y - 2z = -15; \\ 2x - 2y - z = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

Вариант 4

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -1; \\ x - 3y + 2z = 10; \\ 3x - 4y - z = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -4; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -8. \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. В каком случае система уравнений будет несовместной при решении методом Крамера;
2. Напишите общий вид формул Крамера;
3. Опишите метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Практическая работа №5

«Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- решать системы линейных уравнений.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является ***метод Гаусса,*** состоящий в последовательном исключении неизвестных. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (11)$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \qquad (12)$$

где $k \le n,\ \ a_{ii} \ne 0, i = \overline{1,k}.$ Коэффициенты a_{ii} называются ***главными элементами системы***. На втором этапе (обратный ход) идет последовательно определении неизвестных из этой ступенчатой системы.

Замечание 1. Если ступенчатая система оказывается ***треугольной***, т. е. $k = n$, то исходная система (11) имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $x_{n-2},\ldots,x_1$.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение: в результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3;\ \ x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1.$

Если положить, например, $x_3 = 0, x_4 = 0,$ найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 0, x_4 = 0.$

Пример 2. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&3&2&7\\3&1&1&5\\5&-1&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&0&1\\0&-2&-2&-4\\0&-6&-6&-12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&0&1\\0&1&1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\x_2=1,\\x_3=1.\end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1.$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x+y-z=0;\\-2x+y+z=6;\\x+y+z=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-x_1+2x_3=5;\\2x_1+2x_2+5x_3=10;\\3x_1-2x_2+2x_3=-1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3+x_4=9;\\-x_1+2x_2+x_3+2x_4=24;\\3x_1+x_2+x_3-x_4=-1;\\x_1+3x_2+3x_3-4x_4=-5;\end{cases}$

Вариант 2

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases}2x+3y+2z=9;\\x+2y-3z=14;\\3x+4y+z=16;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_2+3x_3=-1;\\2x_1+3x_2+5x_3=3;\\3x_1+5x_2+7x_3=6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-2x_4=-1\\2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-5\\x_1-4x_2+2x_3+x_4=11\\-3x_1+2x_2+x_3-2x_4=-6\end{cases}$

Вариант 3

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x+3y+z=6;\\2x+3y+3z=13;\\3x+3y+z=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x_1+-3x_2+2x_3=2;\\4x_1-5x_2+2x_3=1;\\5x_1-6x_2+4x_3=3;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3-2x_4=1\\-x_1+3x_2+2x_3+2x_4=8\\2x_1-x_2+4x_3+3x_4=-5\\2x_1+3x_2+5x_3+5x_4=2\end{cases}$

Вариант 4

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x+2y+4z=31;\\5x+y+2z=29;\\3x-y+z=10;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x_1+2x_2-4x_3=8;\\2x_1+4x_2-5x_3=11;\\4x_1-3x_2+2x_3=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x_1+3x_2-4x_3+x_4=-4\\x_1+2x_2+3x_3+3x_4=5\\3x_1+x_2-6x_3+x_4=1\\-x_1-3x_2+4x_3+2x_4=7\end{cases}$

Контрольные вопросы

1. В каком случае исходная система имеет единственное решение?;
2. С чем работают на практике для упрощения преобразований над системой?;
3. Опишите метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Практическая работа №6

«Вычисление замечательных пределов. Раскрытие неопределенностей»

Цель работы: научиться вычислять пределы, раскрывать неопределенности.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

знать:

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Число B называется **предлом функции** $f(x)$ **в точке** a (или при x, стремящемся к a), если для любой последовательности значений аргумента $x_n \neq a$, сходящейся к a, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$ сходится к числу B.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ или $f(x) \to B$ при $x \to a$.

Короче, $B = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = B$ для любой последовательности $x_n \neq a$, $n \in N$, сходящейся к a, т.е. $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Свойства пределов сформулируем в виде теорем:

Теорема 1: Функция не может иметь двух разных пределов в точке.

Теорема 2: Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$

Теорема 3: Предел произведения функций равен произведению их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \to a}(cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x),$$

Теорема 4: Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)},$$

Приводим некоторые приёмы вычисления пределов, излагая их на конкретных примерах.

1) ***Предел многочлена***. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$

Решение:
$$\lim_{x \to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7) = \lim_{x \to 2}\left(5x^3\right) + \lim_{x \to 2}\left(2x^2\right) - \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 7 = 5\lim_{x \to 2} x^3 + 2\lim_{x \to 2} x^2 - 3\lim_{x \to 2} x + 7 =$$
$$= 5\left(\lim_{x \to 2} x\right)^3 + 2\left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 - 3\lim_{x \to 2} x + 7 = 5 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 49$$

Т.о. для вычисления предела многочлена $f(x)$ при $x \to a$ достаточно вместо переменной x поставить значение a, к которому она стремится, и выполнить соответствующие действия, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2) ***Предел отношения двух многочленов***, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *где a– число*.

а) Если *g (a) ≠ 0*, то можно применить теорему о пределе частного.
б) Если *g (a)* = 0, то теорему о пределе частного применить нельзя. Тогда если *f(a) = A ≠* 0, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, если же *f(a)* = 0 – имеем неопределённость вида (0/0). В этом случае предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ можно вычислить разложением многочленов *f(x)* и *g(x)* на множители.

Дадим определение предела функции *f(x)* на бесконечности, т.е. $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

Пусть функция *f(x)* определена на всей числовой прямой. Число *B* называется **пределом функции *f(x)* при *x→+∞*,** если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=B$ для любой последовательности (x_n) такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=C$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=C$ для любой последовательности (x_n) такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ В ряде случаев поведение функции *f(x)* разное при x→+∞ и при x→-∞. Например, для функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}$, определенной для всех $x\neq 1$, имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}=-3,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}=3.$$

Поэтому при исследовании свойств функций рассматривают как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, так и $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x)$.

Сформулируем определение **бесконечного предела функции**:

Если для любой последовательности значений аргумента (x_n) такой, что $x_n\neq a$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, то говорят, что предел функции *f(x)* в точке *a* есть бесконечность, и пишут $\lim\limits_{ч\to a} f(x)=\infty$.

3) *Предел отношения многочленов* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *при* $x\to\infty$.

4) *Пределы некоторых иррациональных функций*. Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}$,
где $f(x)\geq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, воспользуемся равенством $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(a)}$, которое принимается нами без доказательства. Например,

$$\lim_{x\to-1}\sqrt{2x^2-3x+4}=\sqrt{2(-1)^2-3(-1)+4}=\sqrt{9}=3.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{3x^2-x+4}-2\right)=0$,(пример 6) то теорему о пределе частного применить нельзя. Имеем неопределённость вида (0/0). Умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю, получим **(пример7)** Данный пример демонстрирует технику раскрытия **неопределенности вида (∞-∞).**

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция *f(x)* называется **бесконечно большой при *x→a*.** Если же $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то функция *f(x)* называется **бесконечно малой при *x→a*.** Аналогично определяются бесконечно большие и бесконечно малые функции при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

Заметим, что имеет место следующее утверждение: если функция $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ и $f(x) \neq 0$ для $x \neq a$ из некоторой окрестности точки a, то функция $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая при $x \to a$. Верно и обратное утверждение: если функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая при $x \to a$.

5) *Применение замечательных пределов* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Пользуясь этими формулами, можно вычислить ряд пределов (пример 8).

Здесь мы воспользовались известным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. (пример 9)

Заменяя $\frac{2x}{3} = y$ и учитывая, что $y \to \infty$ при $x \to \infty$, можем написать (пример 10)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{2x}{3}\right)}\right)^{\left(\frac{2x}{3}\right)}\right)^{\frac{15}{2}} = \lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{\frac{15}{2}} = e^{\frac{15}{2}}.$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Пусть требуется вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}. = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$

Решение: $f(x) = x^3 - 2x - 3$ и $g(x) = x^2 + 3x + 3$. Так как $g(3) = 3^2 + 3\cdot 3 + 3 = 21 \neq 0$. то имеем: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-2x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+3)} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$.

Решение: здесь $f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$, $g(2) = 2^2 - 6\cdot 2 + 8 = 0$. Так как $x \neq 2$, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-4} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(4-\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)} = \frac{3-0+0+0}{4-0-0+0} = \frac{3}{4}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}=0\ .$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)}{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\infty$.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{\left(3x^2-x+4\right)-2^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{3x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{3x-1}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{3\cdot0-0+4}+2\right)}{3\cdot0-1}=-8$$

Пример7. Найти предел $\lim\limits_{ч\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

$$\lim_{ч\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{ч\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{ч\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{ч\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}$

Решение: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}$, заменяя $3x=y$ и учитывая, что $y\to0$ при $x\to0$, получаем: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=3\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot1=3$.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg5x}{\sin3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to0}\frac{tg5x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin5x}{\cos5x}\cdot\frac{1}{\sin3x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos5x}\cdot\frac{5\sin5x}{5x}\cdot\frac{3x}{3\sin3x}\right)=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\cos5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot1\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{3}$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x}$

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/2x)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(2x/3\right)}\right)^{2x/3\cdot3/2\cdot5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(2x/3\right)}\right)^{\left(2x/3\right)}\right)^{15/2}$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Вычислить пределы функций в точке:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3+2x^2-7x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2-121}{x-11}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-3x}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{x^2-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3-5x+2}{6x^2+5x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-7})$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,2x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{\cos 5x-\cos 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{3x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{3x}$

Вариант 2

1. Вычислить пределы функций в точке:

а) $\lim\limits_{x\to -3}(5x^3-4x^2+6x+2)$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x-6}{x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x^3}{x^2-6x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{5+3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tg\,3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{2x}$;

Вариант 3

1. Вычислить пределы функций в точке:

а) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+6x^2-12x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x+31}-6}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{5x-1+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+x^3}{3x^3+2x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+x^3-6}{1+4x-2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg\,4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{4x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{6x}\right)^x$;

Вариант 4

1. Вычислить пределы функций в точке:

а) $\lim\limits_{x\to 5}(x^3-4x^2+8x-18)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2-49}{x+7}$; г) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x+7}{\sqrt{x+32}-5}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+2x-1}{6-3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x^3}{x^3-12x^5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-4x+9}{4-2x+x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} ctg3x\cdot\sin 4x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x+\sin 7x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{5x}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x}$;

Контрольные вопросы

1.Что называется пределом функции в точке? На бесконечности?
2.Какие свойства пределов функций вы знаете?
3.Как раскрывать неопределенности?
4.Какие замечательные пределы вы знаете?

Практическая работа № 7
«Вычисление производной сложной функции».

Цель работы: научиться дифференцировать.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

знать:

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Понятие производной функции

Пусть функция *f (x)* определена в некоторой окрестности точки x_0. ***Производной функции f (x) в точке*** x_0 называется отношение приращения функции $\Delta f\ (x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$, если этот предел существует, и обозначается $f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (1)$$

Производную функции $y = f\ (x),\ x\in(a;b)$ в точке x обозначают $f'(x),\ y'(x), \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}$, причём все эти обозначения равноправны. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием функции.*** Функция, имеющая производную в точке x_0, называется ***дифференцируемой в*** **этой** ***точке.*** Функция, имеющая производную в каждой точке интервала *(a;b)*, называется ***дифференцируемой на*** **этом** ***интервале*****;** при этом производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию на *(a ;b).*

Таблица производных элементарных функций

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$,
2. $(\sin x)' = \cos x, \quad (\sin u)' = \cos u\cdot u'$
3. $(\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos u)' = -\sin u\cdot u'$
4. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

5. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

8. $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(arctg\ u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

9. $(arcctg\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $(arcctg\ u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

10. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$, $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$

11. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

Правила дифференцирования

На практике применяют следующие правила дифференцирования

1. $C' = 0$
2. $(u \pm v)'_x = u'_x \pm v'_x$,
3. $(uv)'_x = u'_x v + v'_x u$, $(Cu)'_x = Cu'_x$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'_x = \dfrac{u'_x v - v'_x u}{v^2}$,

где *u* и *v* обозначают дифференцируемые функции переменной *x*, *C* - константа.

Дифференцирование сложной функции

Теорема. Пусть дана сложная функция $y = g(u)$, где $u = f(x)$. Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, а функция $y = g(u)$ определена на множестве значений функции $f(x)$ и дифференцируема в точке $u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $y = g(f(x))$ в данной точке x_0 имеет производную, которая находится по формуле

$$y'_x(x_0) = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = (x^3 - 5x + 7)^9$.

Решение:

$f'(x) = ((x^3 - 5x + 7)^9)' = \left| \text{обозначим за } z = x^3 - 5x + 7 \right| = (z^9)'_z \cdot z'_x = 9z^8 \cdot$

$\cdot (3x^2 - 5) = 9(x^3 - 5x + 7)^8 \cdot (3x^2 - 5).$

Пример 2. Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = \sqrt[3]{(5 + 3x - 2x^2)^2}$.

Решение:

$$f'(x)=(\sqrt[3]{(5+3x-2x^2)^2})'=\left|\ t=5+3x-2x^2\right|=(t^{\frac{2}{3}})'_t\cdot t'_x=\frac{2}{3}\cdot t^{-\frac{1}{3}}\cdot(5+3x-2x^2)'_x$$

$$=\frac{2(3-4x)}{3\sqrt[3]{5+3x-2x^2}}.$$

Пример 3. Вычислить $f'(x)$, если 1) $f(x)=\sqrt{\arcsin x};$ 2) $f(x)=(\ln(\arccos x^2));$

Решение:

1) $f'(x)=\left(\sqrt{\arcsin x}\right)'=\left|\ t=\arcsin x\ \right|=\left(\sqrt{t}\right)'_t\cdot t'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$;

2) данная функция является суперпозицией трех функций, поэтому имеем

$$f'(x)=\left(\ln(\arccos(x^2))\right)'=\left|\ \textit{положим}\ \ t=\arccos x^2\ \right|=\left(\ln t\right)'_t\cdot\left(\arccos x^2\right)'_x=$$

$$=\left|\ \textit{положим}\ \ z=x^2\ \right|=\frac{1}{t}\cdot\left(\arccos z\right)'_z\cdot z'_x=\frac{1}{t}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)\cdot 2x=-\frac{2x}{\arccos x^2\ \sqrt{1-x^4}}$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y=(7x^2-5x+9)^6$; 2) $y=\sqrt{5\sin x-8\cos x}$; 3) $y=2^{x^2-5x+2}$;

4) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 5); $y=\arcsin x^2$ 6) $y=arctg\sqrt{x}$;

2. Вычислить $f'(\sqrt{2})$, если $f(x)=\arcsin\dfrac{1}{x}$;

3. Вычислить $f'(2\sqrt{2})$, если $f(x)=\dfrac{9x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Вариант 2

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y=(2x^3-4x+5)^4$; 2) $y=\ln(2\cos x-9\sin x)$; 3) $y=7^{5tgx+3}$;

4) $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ 5) $y=(\arcsin x)^2$; 6) $y=\sqrt{arctgx}$;

2. Вычислить $f'(\frac{1}{3})$, если $f(x)=\arccos\sqrt{x}$;

3. Найти $f'(\sqrt{3})$, если $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

Вариант 3

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y=(4x^3+2x^2+1)^5$; 2) $y=\cos(1-7x+4x^2)$; 3) $y=3^{6\sin x+\cos x}$;

4) $y=\ln\frac{x}{5+x}$; 5) $y=\arccos\sqrt{x}$; 6) $y=arcctgx^3$;

2. Вычислить $f'(\frac{\pi}{4})$, если $f(x)=\sqrt{arctgx}$;

3. Найти $f'(\sqrt{3})$, если $f(x)=(x^2-2)\sqrt{x^2+1}$.

Вариант 4

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y=(2+3x-8x^2)^7$; 2) $y=\ln ctgx$; 3) $y=e^{6\arcsin x-2}$;

4) $y=\sqrt{\frac{x}{7+x}}$ 5) $y=arctg\frac{1}{x}$; 6) $y=2\arcsin x^3$;

2. Вычислить $f'(1)$, если $f(x)=\sqrt{\arccos x}$;

3. Найти $f'(\sqrt{2})$, если $f(x)=(x^2+3)\sqrt{x^2-1}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется производной функции в точке?
2. Что такое дифференцирование?
3. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
4. Перечислите табличные производные.
5. Какие правила дифференцирования вы знаете?

Практическая работа № 8

«Исследование функций и построение их графиков»

Цель работы: научиться исследовать функцию с помощью производной и строить графики.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

знать:

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Для построения графиков функций можно использовать следующую схему:

1. Находят область определения функции;
2. Проверяют функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Находят точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Находят асимптоты графика функции;
5. Исследуют функцию на монотонность и находят точки экстремума;
6. Находят интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
7. Строят график.

Для применения данной схемы, вспомним некоторые основные понятия и определения. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** для графика функции $y=f(x)$, если:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0 \qquad (1)$$

Числа k и b в уравнении асимптоты находятся из условий:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) \qquad (2)$$

Если $k=0$, то прямая $y=b$ называется ***горизонтальной асимптотой***.
Прямая $x=a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \quad \textit{или} \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty .$$

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции $y=f(x)$ в качестве точки a, через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точку разрыва данной функции.

Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:

1. Вычислить производную функции $f'(x)$;
2. Найти критические точки функции, т.е. точки в которых $f'(x)=0$ или не существует;
3. Исследовать знак производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции этими критическими точками;
4. Если в рассматриваемом интервале
   $f'(x)\prec 0$, то на этом интервале функция убывает;
   $f'(x)\succ 0$, то на этом интервале функция возрастает.
5. Если x_0 - критическая точка и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с «+» на « - », то x_0 - точка максимума; если же она меняет знак с « - » на «+», то x_0 - точка минимума.

Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:

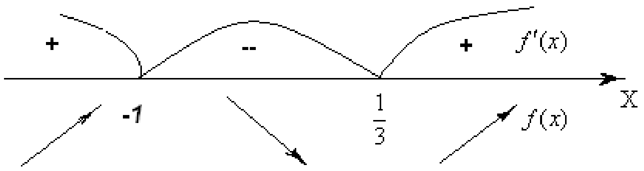
1. Вычислить вторую производную функции $f''(x)$;
2. Найти у функции критические точки 2-го рода, т.е. точки в которых $f''(x)=0$ или не существует;
3. Исследовать знак второй производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками 2-го рода;
4. Если в рассматриваемом интервале
   $f''(x)\prec 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вверх;
   $f''(x)\succ 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вниз;
5. Если x_0 - критическая точка 2-го рода и при переходе через нее $f''(x)$ меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Исследовать функцию $y=x^3+x^2-x-1$ и построить ее график.
Решение: исследуем функцию по схеме:

1. D(y)=R;
2. $y(-x)=(-x)^3+(-x)^2-(-x)-1=-x^3+x^2+x-1=-(x^3-x^2-x+1)$ - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;
3. Найдем точки пересечения с (ОХ): $x^3+x^2-x-1=0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x=-1$ *и* $x=1$.
   Найдем точки пересечения графика функции с осью (ОУ): если $x=0$, то $y=-1$;
4. Асимптот нет;
5. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную:

$y' = 3x^2 + 2x - 1$. Найдем критические точки функции: $y' = 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Получим: $x_1 = -1$ *и* $x_2 = \frac{1}{3}$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



Из чертежа имеем, что функция возрастает на $(-\infty;-1)$ *и* $(\frac{1}{3};+\infty)$, убывает на $(-1;\frac{1}{3})$.

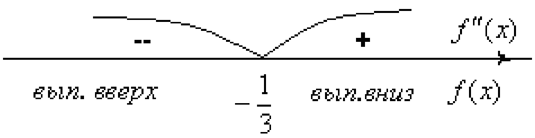
Найдем экстремумы функции:

$\max f(x) = f(-1) = 0$. Значит, точка максимума имеет координаты $(-1; 0)$

$\min f(x) = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$. Значит, точка минимума имеет координаты $(\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

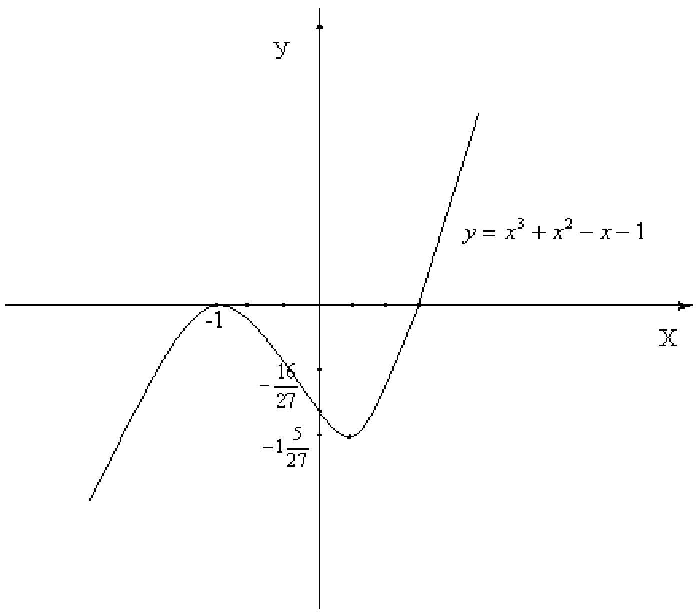
6. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную: $y'' = 6x + 2$. Найдем критические точки 2 рода функции:

$6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Определим знак второй производной в интервалах, на которые разбивается область определения:



Значит, график функции будет выпуклым вверх на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ и выпуклым вниз на $(-\frac{1}{3};+\infty)$. Т.к. вторая производная меняет знак при переходе через точку $x = -\frac{1}{3}$, то в ней график будет иметь перегиб. Вычислим: $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{16}{27}$. Значит, точка перегиба $(-\frac{1}{3};-\frac{16}{27})$.

7. Построим график:



Пример 2. Построить график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Решение:

1. Найдем область определения функции. Она задается условиями $x \neq 1$, $x \neq -1$ (при значениях $x \neq 1$, $x \neq -1$ знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

$$D(f)=(-\infty;1)(-1:1)(1;+\infty).$$

2. Исследуем функцию на честность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$$

Значит, заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при $x \geq 0$.

3. Точек пересечения графика функции с осью ОХ нет,
Найдем точки пересечения графика функции с осью ОУ: если $x=0$ *то* $y=-1$

4. Найдем асимптоты графика. Вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Значит, $y = 1$ – горизонтальная асимптота графика функции.

5. Найдем критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

$$y'\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Критические точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем $-4x = 0$, откуда находим, что $x = 0$. При $x < 0$ имеем $y' > 0$, а при $x > 0$ имеем $y' < 0$. Значит, $x = 0$ – точка максимума функции, причем $y_{max} = f(0)=\dfrac{0^2+1}{0^2-1} = -1$.

При $x > 0$ имеем $y' < 0$, но следует учесть наличие точки разрыва $x = 1$. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке $[0;1)$ функция убывает, на промежутке $(1;+\infty)$ функция также убывает.

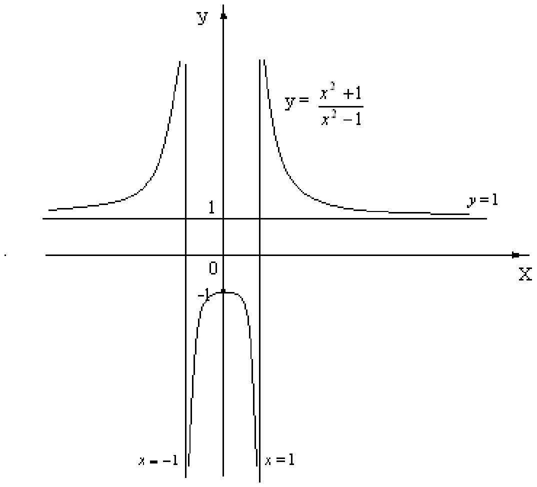
6. Вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-4(x^2-1)^2+4x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x)$ нигде не обращается в ноль, критическими точками будут только точки $x = \pm 1$.
Определим знак $f''(x)$ в интервалах:

7. Отметим (0;-1) – точку максимума, построим прямые $y = 1$ – горизонтальную

асимптоту, что x = 1 и x = - 1– вертикальные асимптоты;



Задания для практического занятия:

Вариант 1

Исследовать по схеме и построить графики функций:

1) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8;$ 2) $y = 3x + \frac{1}{3x};$ 3) $y = \frac{x^2 - 4}{x}$

Вариант 2

Исследовать по схеме и построить графики функций:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1;$ 2) $y = \frac{4}{x} - x;$ 3) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Вариант 3

Исследовать по схеме и построить графики функций:

1) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1;$ 2) $y = \frac{8}{x} + x;$ 3) $y = \frac{6 - x^3}{x^2}$

Вариант 4

Исследовать по схеме и построить графики функций:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 16;$ 2) $y = x - \frac{1}{x};$ 3) $y = \frac{x^2 + 9x + 8}{x}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение наклонной асимптоты, горизонтальной и вертикальной асимптот;
2. Сформулируйте правило нахождения интервалов монотонности и точек перегиба;
3. Сформулируйте правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба;
4. Опишите схему исследования функции для построения ее графика.

Практическая работа № 9

«Интегрирование функции способом замены переменной»

Цель работы: научиться вычислять неопределенные интегралы.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен
уметь:
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления.
знать:
- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Неопределенный интеграл

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна *f(x):*

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \le x \le b \qquad (1)$$

Совокупность всех первообразных функций *F*(x) + c для функции *f*(x) на некотором промежутке называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а C - произвольной постоянной интегрирования. Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*.

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x$ +C;
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ +C; $(n \ne -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ +C;
4. $\int e^x dx = e^x$ +C;
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ +C;
6. $\int \sin x dx = -\cos x$ +C;
7. $\int \cos x dx = \sin x$ +C;
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx$ +C;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$ +C;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$;
13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$;
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ +C;
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$ +C;
16. $\int \ln x dx = x \ln x - x$ +C;

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x)+\varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a \neq 0.$$

Метод непосредственного интегрирования

Под непосредственным интегрированием понимают способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводятся к одному или нескольким табличным интегралам.

Интегрирование способом подстановки

Сущность интегрирования методом подстановки заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования. Для нахождения $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x = \varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получаем $dx = \varphi'(u)du$. Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения , выраженные через u du , имеем:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int F(u)du \qquad (3)$$

После того, как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u = \phi(x)$ он приводится к переменной x.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Определённый интеграл

Приращение *F (b) – F (a)* любой из первообразных функций *F (x) + C* функции *f (x)* при изменении аргумента от *x = a* до *x = b* называется ***определённым интегралом от a до b функции f (x):***

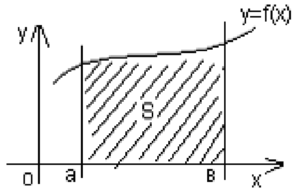
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Числа *a* и *b* называются ***пределами интегрирования, а – нижним, b – верхним.*** Отрезок [*a;b*] называется ***отрезком интегрирования.*** Функция *f (x)* называется ***подынтегральной функцией,*** а переменная *x* – ***переменной интегрирования.*** Формула (1) называется ***формулой Ньютона - Лейбница.***

Геометрический смысл определенного интеграла

Если интегрируемая на отрезке [a;b] функция f (x) неотрицательна, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f (x), осью абсцисс и прямыми x = a и x = b :

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



Свойства определённого интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Если a<c<b, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

4. Если функция *f (x)* неотрицательная на отрезке [*a;b*], где *a*<*b*, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$;

5. Если *f (x)*≥ *g (x)* для всех $x \in [a;b]$, где *a*<*b*, то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

6. Если *m* и *M* – наименьшее и наибольшее значения функции *f (x)* на отрезке [*a;b*], где *a*<*b,* то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \mathrm{M}(b-a)$

7. (Теорема о среднем). Если функция *f (x)* непрерывна на отрезке [*a;b*], то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

Методы вычисления определенного интеграла

Непосредственное интегрирование предполагает использование основных свойств определенного интеграла и формулы Ньютона – Лейбница.

Метод подстановки сводит определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью подстановки $u=\varphi(x)$ к определенному интегралу относительно новой переменной *u.* При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования a_1 и b_1, которые находятся из исходной подстановки: $a_1=\varphi(a), \quad b_1=\varphi(b)$.

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле производится по формуле

$$\int_a^b u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{dv} = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\underbrace{u'(x)dx}_{du},$$

где полагается, что функции *u(x)* и *v(x)* непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;\ b]$.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить*:* 1) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx$; 2) $\int \frac{(x+2)^3 dx}{x}$;

Решение:

1) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx = 5\int x^4 dx - 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - \int dx = x^5 - x^4 + x^3 - x + C$;

2) $\int \frac{(x+2)^3 dx}{x} = \int \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x} dx = \int (x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x})dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 12x + 8\ln|x| + C$

Пример 2. Вычислить 1) $\int (1+x)^5 dx$; 2) $\int \frac{2e^x dx}{(1-e^x)^2}$; 3) $\int \frac{x^2+1}{x+2} dx$; 4) $\int x \cdot \sqrt{x-3} dx$;

5) $\int \sin 8x \cos 2x \, dx$;

Решение:

1) Положим *1+x = z*. Продифференцируем это неравенство: *d(1+ x)= dz* или *dx = dz.*

Заменим в интеграле**:** $\int (1+x)^5 dx = \int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{1}{6} \cdot (1+x)^6 + C$.

2) Сделав замену : $1 - e^x = z$, получим $d(1-e^x) = dz \Rightarrow -e^x dx = dz; \Rightarrow e^x dx = -dz;$

Тогда:

$$\int \frac{2e^x dx}{(1-e^x)^2} = -2\int \frac{dz}{z^2} = \frac{2}{z} + C = \frac{2}{1-e^x} + C;$$

3) Положим $x + 2 = t; \Rightarrow x = t - 2; \Rightarrow dx = d(t-2) = dt$

$$\int \frac{x^2+1}{x+2} dx = \int \frac{(t-2)^2+1}{t} dt = \int \frac{t^2 - 4t + 5}{t} dt = \int \left(t - 4 + \frac{5}{t}\right) dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 5\ln|t| + C =$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} - 4(x+2) + 5\ln|x+2| + C = \frac{x^2}{2} - 2x - 6 + 5\ln|x+2| + C = \frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln|x+2| + C_1,$$

где $C_1 = C - 6$;

4) Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3,\quad dx = 2tdt$. Поэтому

$$\int x \cdot \sqrt{x-3} dx = \int (t^2+3) \cdot t \cdot 2tdt = 2\int (t^4 + 3t^2)dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C;$$

5) Этот интеграл решается с помощью формул тригонометрии:

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) .$$

Поэтому, имеем $\int \sin 8x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 6x)dx = -\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$;

Пример 3: Вычислить $\int_0^{\frac{n}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x}$**.**

Решение**:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 3tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg0\right) = 3$$

Пример 4: Вычислить $\int_0^{\pi}\left(2e^{2x} + 3\cos x\right)dx$

Решение: $\int_0^{\pi}\left(2e^{2x} + 3\cos x\right)dx = 2\int_0^{\pi} e^{2x}dx + 3\int_0^{\pi}\cos xdx = \left(e^{2x} + 3\sin x\right)\Big|_0^{\pi} = \left(e^{2\pi} + 3\sin\pi\right) - \left(e^0 + 3\sin 0\right) =$

$= e^{2\pi} - 1 \approx 534{,}492$

Пример 5. Вычислить $\int_1^8\left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ **:**

Решение: $\int_1^8\left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot dx = 4\int_1^8 xdx - \frac{1}{3}\int_1^8 x^{-2/3}dx = 2x^2\Big|_1^8 - \sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$

$= 2(8^2 - 1) - (\sqrt[3]{8} - 1) = 2\cdot 63 - 1 = 125$

Пример 6. Вычислить $\int_0^1\left(e^x - 1\right)^4 e^x dx$

Решение:

$$\int_0^1\left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \left|\begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ d(e^x - 1) = dt \\ e^x dx = dt \\ a' = e^0 - 1 = 0 \\ b' = e^1 - 1 = e - 1 \end{array}\right| = \int_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^{e-1} = \frac{(e-1)^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}(e-1)^5$$

Пример 7. Вычислить $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}dx$.

Решение: Положим $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\ dt$. Если $x = 0,\quad mo\quad t = 0$, если $x = 2,\ mo\quad t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t}\ 2\cos t\ dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\ dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1 - \cos 4t)dt = 2(t - \frac{1}{4}\sin 4t)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(4\cdot\frac{\pi}{2})) - 0 = \pi$$

Пример 8. Вычислить $\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln xdx$.

Решение: Положим $u = \ln x,\ dv = \sqrt{x}dx = x^{\frac{1}{2}}dx \ \Rightarrow du = \frac{dx}{x}\ ,\ v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Отсюда, учитывая формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2}-\frac{2}{3}\int_1^{e^2}x\sqrt{x}\frac{dx}{x}=\frac{2}{3}e^6\cdot 4-\frac{2}{3}\int_1^{e^2}\sqrt{x}dx=\frac{8}{3}e^6-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^{e^2}=\frac{8}{3}e^6-\left(\frac{4}{9}e^6-\frac{4}{9}\right)=$$
$$=\frac{4}{9}\left(5e^6+1\right)$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Методом подстановки вычислить:

а) $\int(7+3x)^5dx$; б) $\int 3\sin 5xdx$; в) $\int\frac{5dx}{1+9x^2}$; г) $\int\sqrt[3]{(2-5x)^2}dx$;

д) $\int\sqrt{e^x-1}\cdot e^xdx$ е) $\int\frac{3dx}{1+2x}$; ж) $\int\frac{\ln^2 xdx}{x}$; з) $\int\sin 5x\cos 3xdx$;

2. Вычислить методом непосредственного интегрирования:

1) $\int_{-\frac{n}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int_{-1}^{1}3(1+z^2)dz$; 3) $\int_0^4(x-3\sqrt{x})dx$;

3. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int_{-2}^{1}(5-2x)^2dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{3-\cos x}dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x+1}}dx$; ;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos xdx$; 5) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{3+4x^2}$;

Вариант 2

1. Методом подстановки вычислить:

а) $\int(5-4x)^6dx$; б) $\int 7\cos 6xdx$; в) $\int\frac{4dx}{3-4x}$; г) $\int\frac{7dx}{\sqrt{1-16x^2}}$;

д) $\int\sqrt[3]{x^2-3}\cdot xdx$; е) $\int\frac{e^xdx}{e^x+1}$; ж) $\int\frac{tgx\,dx}{\cos^2 x}$; з) $\int\sin 2x\sin 6xdx$;

2. Вычислить методом непосредственного интегрирования:

1) $\int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}$ 2) $\int_{-1}^{1}5(y^2+1)dy$; 3) $\int_1^9(2x-\frac{3}{\sqrt{x}})dx$;

3. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int_2^3(2x-1)^2dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$; 3) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}3e^{x^2}xdx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos^2 x\,dx$; 5) $\int_0^1\frac{e^x}{e^x+5}dx$;

Вариант 3

1. Методом подстановки вычислить:

а) $\int (2-7x)^4 dx$; б) $\int 6\cos 2x dx$; в) $\int \frac{5dx}{3-4x}$; г) $\int \frac{2dx}{1+16x^2}$;

д) $\int \sqrt[4]{(7x+4)^3}\, dx$; е) $\int e^x \cos(e^x) dx$; ж) $\int \frac{\sin x\, dx}{5-2\cos x}$; з) $\int \cos 4x \cos 5x dx$;

2. Вычислить методом непосредственного интегрирования:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int_0^2 4(x-x^3)dx$; 3) $\int_1^4 (4x-\frac{2}{\sqrt{x}})dx$;

3. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int_4^5 (4-x)^3 dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 3) $\int_0^{\frac{n}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos x dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$; 5) $\int_0^1 e^{x^2} x dx$;

Вариант 4

1. Методом подстановки вычислить:

а) $\int (2x-9)^3 dx$; б) $\int 11\sin 3x dx$; в) $\int \frac{9dx}{4x-5}$; г) $\int \frac{7dx}{\sqrt{1-36x^2}}$;

д) $\int \sqrt{4\sin x-1}\cos x\, dx$; е) $\int \frac{e^x dx}{\sin^2(e^x)}$; ж) $\int \frac{\arcsin^2 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$; з) $\int \sin 8x \cos 3x dx$;

2. Вычислить методом непосредственного интегрирования:

1) $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int_{-2}^{0} 2(x^3-x)dx$; 3) $\int_4^9 (x^2-\sqrt{x})dx$

3. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int_{-1}^{2} (x^2-1)^3 x dx$; 2) $\int_{\frac{n}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\sin^2 3x}dx$; 3) $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\sin x dx$;

4) $\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{x}{x^2-1}dx$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 x\cdot\cos x\, dx$;

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$, $x\in(a;b)$?
2. Что называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на некотором промежутке?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Перечислите основные табличные интегралы.
5. Какие методы интегрирования вы знаете?

Практическая работа № 10

«Интегрирование функции по частям»

Цель работы: научиться вычислять неопределенные интегралы.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

знать:

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Неопределенный интеграл

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна *f(x):*

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \le x \le b \qquad (1)$$

Совокупность всех первообразных функций *F*(x) + c для функции *f*(x) на некотором промежутке называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, *x* – переменной интегрирования, а С - произвольной постоянной интегрирования. Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*.

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad (n \ne -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$
13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$
16. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C;$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a \neq 0.$$

Метод непосредственного интегрирования

Под непосредственным интегрированием понимают способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводятся к одному или нескольким табличным интегралам.

Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке. Найдем дифференциал произведения этих функций:

$$d(uv) = u'vdx + uv'dx.$$

Так как по условию функции $u'v$ и uv' непрерывны, можно проинтегрировать обе части этого равенства,

$$\int d(uv) = \int u'vdx = \int uv'dx,$$

или

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv$$

но

$$\int d(uv) = uv + C,$$

следовательно

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (4)$$

В правой части формулы (4) постоянную интегрирования C не пишут, т.к она фактически присутствует в интеграле $\int vdu$. Формула (4) называется ***формулой интегрирования по частям.***

Сущность метода интегрирования по частям вполне соответствует его названию. Дело в том, что при вычислении интеграла этим методом подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде произведения множителей u и dv; при этом dx обязательно входят в dv. В результате получается, что заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int vdu$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных двух интегралов более проста, чем нахождение заданного интеграла.

При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разумное разбиение подынтегрального выражения на множители u и dv. Общих установок по этому вопросу не имеется. Однако, для некоторых типов интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, сделать это возможно.

1. В интегралах вида: $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$,
   где *P(x)* – многочлен относительно *x*, *a* – некоторое число, полагают $u = P(x)$, а все остальные сомножители за dv.
2. В интегралах вида: $\int P(x)\ln|ax|dx$, $\int P(x)\arcsin axdx$, $\int P(x)\arccos axdx$,
   $\int P(x)arctgaxdx$, $\int P(x)arcctgaxdx$
   полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители за u.
3. В интегралах вида: $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, где *a* и *b* числа, за u можно принять

любую из функций e^{ax} или *sin bx* (или *cos bx*).

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить*:* 1) $\int(5x^4-4x^3+3x^2-1)dx$; 2) $\int\frac{(x+2)^3dx}{x}$;

Решение:

1) $\int(5x^4-4x^3+3x^2-1)dx=5\int x^4dx-4\int x^3dx+3\int x^2dx-\int dx=x^5-x^4+x^3-x+C$;

2) $\int\frac{(x+2)^3dx}{x}=\int\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x}dx=\int(x^2+6x+12+\frac{8}{x})dx=\frac{1}{3}x^3+3x^2+12x+8\ln|x|+C$

Пример 1. Вычислить 1) $\int x\sin xdx$; 2) $\int x\ln xdx$;

Решение:

1) положим $u=x$, $dv=\sin xdx$; тогда $du=dx$, $\int dv=\int\sin xdx$, т.е. $v=-\cos x$. Используя формулу (4), получим $\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$.

2) $\int x\ln xdx$; положим *u=lnx, dv=xdx;* тогда $du=\frac{dx}{x}$; $v=\int dv=\int xdx=\frac{x^2}{2}$.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(2x^2+7x-1)dx$; б) $\int\frac{(2-3x)^2}{x^3}dv$ в) $\int(6^x-\frac{4}{\sqrt{x}})dx$

г) $\int\left(3\sin x+\frac{4}{x^4}\right)dx$; д) $\int\left(\frac{8}{\cos^2x}-\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$; е) $\int\frac{dx}{121+x^2}$;

2. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int(1-x)\sin xdx$ б) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$

Вариант 2

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(4x^4-8x^3+\sqrt{x})dx$; б) $\int\frac{(1-4x)^2}{x^4}dx$; в) $\int(6^{2x}-\frac{4}{x})dx$;

г) $\int\left(10\cos x-\frac{2}{x^3}\right)dx$*;* д) $\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{12}{81+x^2}\right)dx$; е) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}}$;

2. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int x\cos xdx$; б) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

Вариант 3

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(-x^3-8x^2+4)dx$; б) $\int\frac{(4x+x^2)^2}{x^5}dx$; в) $\int(\sqrt[3]{x^2}-5^x)dx$

г) $\int\left(\frac{4}{\sqrt{49-x^2}}+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)dx$; д) $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx$; е) $\int\frac{dx}{25+16x^2}$;

2. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int xe^x dx$; б) $\int \arcsin x\,dx$;

Вариант 4

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(9x^5+3x^2-8)dx$; б) $\int\frac{(x-2x^2)^2}{x^2}dx$; в) $\int(2^{3x}-9\sqrt{x}+5)dx$;

г) $\int\left(\frac{8}{100+x^2}-\frac{1}{4\cos^2 x}\right)dx$; д) $\int\left(\frac{5}{x^4}+4\cos x\right)dx$; е) $\int\frac{3dx}{\sqrt{4-49x^2}}$.

2. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int x^2\ln x dx$; б) $\int arctg\,x\,dx$.

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x),\quad x\in(a;b)$?
2. Что называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на некотором промежутке?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Перечислите основные табличные интегралы.
5. Какие методы интегрирования вы знаете?

Практическая работа № 11

«Действия над комплексными числами. Переход от алгебраической формы к тригонометрической»

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

знать:

- основы теории комплексных чисел.

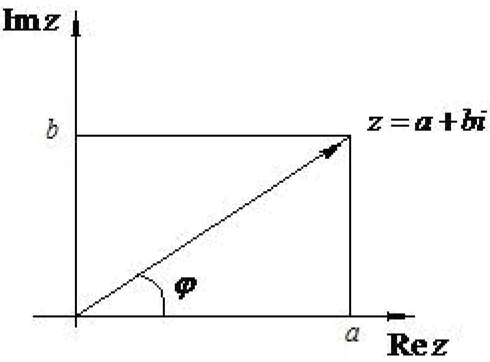
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексное число в алгебраической форме имеет вид

$$z=\alpha+bi\quad, \tag{1}$$

где a и b – действительные числа, а i - некоторый символ, называемый ***мнимой единицей*** и $i^2=-1$, т.е. $i=\sqrt{-1}$. В формуле (1) a называется действительной частью, а b - мнимой частью комплексного числа z и обозначается $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$. Т.е., каждое комплексное число $z=a+bi$ однозначно определяется парой чисел *(a ; b),* его действительной и мнимой частью. С другой стороны нам известно, что при введении декартовой системы координат на плоскости $X0Y$ положение любой её точки также однозначно определяются парой чисел $(x;y)$, которые называются координатами точки. Установив это взаимооднозначное соответствие, можно изображать комплексные числа на плоскости, которую назвали комплексной плоскостью C. В ней вместо оси OX – ось $\operatorname{Re} z$, а вместо оси OY - ось $\operatorname{Im} z$. Любое комплексное число $z = a + bi$ на такой плоскости изображается точкой с координатами $(a;b)$ или радиус-вектором с теми же координатами.



Из рисунка можно ввести новые понятия для комплексного числа $z = a + bi$. Это его ***модуль*** $z = |z|$ и ***аргумент*** $\varphi = \arg z$.

Из прямоугольного треугольника имеем:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{b}{r};\ \cos\varphi = \frac{a}{r} \qquad (2)$$

Отметим, что аргумент φ можно найти и другим способом: сначала определить $tg\varphi = \frac{b}{a}$, а затем, используя алгебраическую форму записи, установить, в какой четверти находится данное комплексное число.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Выразим из (2) a и b:

Из формул (2) выразим a и b:

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi \qquad (3)$$

Из формул (2) выразим a и b:

Подставив (3) в (1), можно перейти от алгебраической формы комплексного числа к новой записи комплексного числа:

$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Следовательно, $$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (4)$$

Формула (4) называется ***тригонометрической формой комплексного числа.*** Заметим, что комплексные числа, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на целое число, кратное 2л.

Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Пусть даны два числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Тогда их произведение можно найти по формуле:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \qquad (5)$$

т.е. модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей. Формула (5) имеет место для любого конечного числа сомножителей: если

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \ldots, z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, то

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)) \qquad (6)$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме производится по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \qquad (7)$$

т. е. модуль частного двух комплексных чисел z_1 z_2 равен частному модулей, а аргумент частного – разности аргументов. Применяя формулу (7) к частному случаю $z_1 = 1, \quad z_2 = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, найдём тригонометрическую форму ***обратного числа*** z^{-1} **:**

$$z^{-1} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \qquad (8)$$

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

Если $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то формула (6) принимает вид

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (9)$$

Формула (9) называется ***формулой Муавра.*** Она показывает, что для возведения комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль, а аргумент умножить на показатель степени.

Если $|z| = 1$, то формула (9) принимает вид:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad (10)$$

Извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме

Корнем n-ой степени, $n \in N, n \geq 2,$ ***из числа z*** такое комплексное число ***u***, для которого $u^n = z.$ Операция нахождения корней *n*-ой степени из комплексного числа *z* называется ***извлечением корня n-ой степени*** из числа z и результат её обозначается $\sqrt[n]{z}$.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда корни *n*-ой степени из числа *z* будем вычислять по следующей формуле:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right), \qquad (11)$$

где $k = 0,1,2,\ldots n-1$, и все эти значения различны.

Геометрическая интерпретация корней $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ дана на рисунке, откуда видно, что числа изображаются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиусом $r = \sqrt[6]{2}$ с центром в начале координат.

Показательная форма комплексных чисел

Рассматривая комплексные числа вида $z(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi$, зависящие от действительной переменной φ и комплекснозначные функции вида $u(\varphi)=e^{i\varphi}$ ($e\approx 2{,}71828...$), Л. Эйлер заметил, что относительно операций умножения и дифференцирования эти выражения имеют одни и те же свойства, т.е. они представляют модели одной и той же логической структуры:

$$z(\varphi_1)z(\varphi_2)=(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)=z(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$u(\varphi_1)u(\varphi_2)=e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=e^{i\varphi_1+i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=u(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$z'(\varphi)=(\cos\varphi+i\sin\varphi)'=-\sin\varphi+i\cos\varphi=i^2\sin\varphi+i\cos\varphi=i(\cos\varphi+i\sin\varphi)=iz(\varphi)$$

$$u'(\varphi)=\left(e^{i\varphi}\right)'=ie^{i\varphi}=iu(\varphi)$$

Таким образом, выражения $e^{i\varphi}$ и $\cos\varphi+i\sin\varphi$ имеют одну и ту же логическую сущность, в связи с этим Эйлер предложил формулу:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi, \qquad (12)$$

которая теперь известна как ***формула Эйлера.***

Пусть дано комплексное число в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Применяя формулу Эйлера, получим

$$z=re^{i\varphi}, \qquad (13)$$

которая называется ***показательной формой комплексного числа.***

Действия над комплексными числами в показательной форме

Пусть даны два комплексных числа в показательной форме

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1}, \ z_2=r_2e^{i\varphi_2}$$

Тогда их произведение и частное могут быть найдены по формулам:

$$z_1z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad (14)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (15)$$

Пусть $z=re^{i\varphi}$; тогда операции возведения в степень и извлечения корня выполняются по формулам:

$$z^n=\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi} \qquad (16)$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \qquad (17)$$

где $k=0,1,2,...,n-1$.

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Найти тригонометрическую форму числа $z=2+2i$.

Решение: имеем $r=|z|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. Находим $\arg z: tg\varphi=\frac{2}{2}=1$, и так как $z=2+2i$ находится в первом квадранте, то берем $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Итак, $2+2i=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

Пример 2. Найти тригонометрическую форму числа $z=-\sqrt{3}+i$.

Решение: имеем $r=|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$. Находим φ: $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{1}{2}$, следовательно, $\varphi=\frac{5\pi}{6}$. Итак, $-\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)$.

Пример 3. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=-1+\sqrt{3}i$

Решение: так как $a=-1,\ b=\sqrt{3}$, то $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$; далее,

$\cos\varphi=-\frac{1}{2},\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда имеем $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

Пример 4. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.$

Решение: имеем $|z|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=1$ $tg\varphi=\frac{b}{a}=\frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2}=1;$ так как $a<0$, $b<0$,

то угол φ принадлежит III четверти. Значит, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$.

Пример 5. Умножить числа: $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение: $z_1z_2=2\cdot3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=6\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Пример 6. Даны комплексные числа $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$,

Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}-i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

Пример 7. Найти число, обратное к $z=6(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

Решение: Согласно формуле (8) получим

$$z^{-1}=\frac{1}{6}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))=\frac{1}{6}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{12}-i\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Пример 8. Вычислить $(1+i)^{30}$.

Решение: чтобы воспользоваться формулой Муавра, найдём тригонометрическую форму числа $1+i$. Имеем $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Тогда

$$(1+i)^{30}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{30}=\left(\sqrt{2}\right)^{30}\left(\cos\frac{30\pi}{4}+i\sin\frac{30\pi}{4}\right)=$$

$$=2^{15}\left(\cos\left(6\pi+\frac{6\pi}{4}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{6\pi}{4}\right)\right)=2^{15}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2^{15}\cdot i.$$

Пример 9. Вычислить $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$.

Решение: имеем:

$z=\sqrt{3}-i;\quad |z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2;\quad \sin\varphi=-\dfrac{1}{2};\ \cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\Rightarrow\ \varphi=\dfrac{11}{6}\pi$. Тогда

$z=\sqrt{3}-i=2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$. Отсюда по формуле (11) получим:

$$u_k=\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}=\sqrt[6]{2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi\kappa}{6}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi\kappa}{6}\right),$$

где $\kappa=0,1,2,3,4,5$. Тогда получаем

$u_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{36}+i\sin\dfrac{11\pi}{36}\right)$, $\qquad u_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{36}+i\sin\dfrac{23\pi}{36}\right)$,

$u_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{35\pi}{36}+i\sin\dfrac{35\pi}{36}\right)$, $\qquad u_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{47\pi}{36}+i\sin\dfrac{47\pi}{36}\right)$,

$u_4=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{59\pi}{36}+i\sin\dfrac{59\pi}{36}\right)$, $\qquad u_5=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{71\pi}{36}+i\sin\dfrac{71\pi}{36}\right)$.

Пример 10. Найти $\sqrt[4]{1}$.

Решение:

$$u_k=\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4}+i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right)=\cos\frac{\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi k}{2}$$

Полагая $k=0,1,2,3,$ получим:

$u_0=\cos 0+i\sin 0=1$, $u_1=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=i$, $u_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$,

$u_3=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-i$.

Пример 11. Найти $\sqrt[3]{i}$.

Решение:

$$u_k=\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)=\cos\frac{\pi+4\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+4\pi k}{6}$$

Полагая, $k=0,1,2,$ получим: $u_0=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, $u_1=\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$;

$u_2=\cos\dfrac{9\pi}{6}+i\sin\dfrac{9\pi}{6}=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}=-i$.

Пример 12. Найти показательную форму чисел: 1) $z_1=1+i$; 2) $z_2=-\sqrt{3}-i$

Решение:

1) Находим $r=|z_1|=\sqrt{2}$, $\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}$, следовательно, $z_1=1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

2) Находим $r=|z_2|=2$, $\varphi_2=\dfrac{7}{6}\pi$, следовательно, $z_2=-\sqrt{3}-i=2e^{\frac{7}{6}\pi i}$

Пример 13. Найти алгебраическую форму чисел:

1) $z_1=2e^{\frac{\pi}{3}i}$; $\qquad$ 2) $z_2=3e^{-\frac{\pi}{6}\pi i}$; $\qquad$ 3) $z_3=e^{-3+4i}$.

Решение:

1) Имеем $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

2) Имеем $z_2 = 3e^{-\frac{\pi}{6}i} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$.

3) Имеем $z_3 = e^{-3+4i} = e^{-3}e^{4i} = e^{-3}(\cos 4 + i\sin 4) \approx 0{,}05(-0{,}65 - 0{,}76i) \approx -0{,}03 - 0{,}04i$.

Пример 14. Найти произведение $z_1 z_2$ и частное z_1 / z_2 комплексных чисел и написать результаты в алгебраической форме: а) $z_1 = 3e^{\frac{2}{3}\pi i}$; $z_2 = 6e^{\frac{\pi}{6}i}$;

Решение:

а) $z_1 z_2 = 3e^{\frac{2}{3}\pi i} \cdot 6e^{\frac{\pi}{6}i} = 18e^{\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6}\right)i} = 18e^{\frac{5}{6}i} = 18\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = 18\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -9\sqrt{3} + 9i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2}{3}\pi i}}{6e^{\frac{\pi}{6}i}} = \frac{1}{2}e^{\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6}\right)i} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{6}\pi i} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0 + i) = \frac{i}{2};$$

Пример 15. Вычислить z^4, $\sqrt[3]{z}$ для $z = 2e^{-\frac{3}{4}\pi i}$, и представить результаты в алгебраической форме

Решение:

$$z^4 = \left(2e^{-\frac{3}{4}\pi i}\right)^4 = 2^4 e^{-3\pi i} = 16e^{-3\pi i} = 16(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)) = 16(-1 + 0i) = -16$$

$$u_k = \sqrt[3]{2e^{-\frac{3}{4}\pi i}} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{-\frac{3}{4}\pi + 2\pi\kappa}{3}i},\ k = 0{,}1{,}2.$$

$$u_0 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{-\frac{3}{2}\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{\pi}{2}i} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt[3]{2}(0 - i) = -\sqrt[3]{2}\,i$$

$$u_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{-\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}i$$

$$u_2 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{-\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{5\pi}{6}i} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}i$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Дано $z_1 = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$; $z_2 = 6(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)$; $z_3 = 4(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi)$;

   найти $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$. Результат записать в тригонометрической и алгебраической форме;
2. Дано $z = -2\sqrt{3} + 2i$. Привести число в тригонометрическую форму и вычислить z^6;
3. Дано число в тригонометрической форме $z = 64\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Вычислить $\sqrt[3]{z}$.
4. Привести в показательную форму число $4 - 4i$ и вычислить z^4;

5. Найти $\dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$, если $z_1 = 10e^{\frac{7}{6}\pi i}$; $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$; $z_3 = 2{,}5e^{\frac{\pi}{3}i}$;

6. Извлечь корень $\sqrt[4]{z}$, *если* $z = 16e^{\pi i}$. Результат указать в показательной и алгебраической форме;

7. Вычислить: $\dfrac{\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)^3}{\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6}$

Вариант 2

1. Дано $z_1 = 3(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi)$; $z_2 = 8(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$; $z_3 = 6(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)$;

найти $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$. Результат записать в тригонометрической и алгебраической форме;

2. Дано $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$. Привести число в тригонометрическую форму и вычислить z^8;

3. Дано число в тригонометрической форме $z = 81\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$. Вычислить $\sqrt[4]{z}$.

4. Привести в показательную форму число $-4-4\sqrt{3}i$ и вычислить z^3;

5. Найти $\dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$, если $z_1 = 12e^{\frac{5}{3}\pi i}$; $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$; $z_3 = 2e^{\frac{5}{6}\pi i}$;

6. Извлечь корень $\sqrt[3]{z}$, *если* $z = 125e^{\frac{3}{4}\pi i}$. Результат указать в показательной и алгебраической форме;

7. Вычислить: $\dfrac{\left(\cos\frac{3}{10}\pi + i\sin\frac{3}{10}\pi\right)^5}{\left(\cos\frac{3}{16}\pi + i\sin\frac{3}{16}\pi\right)^4}$

Вариант 3

1. Дано $z_1 = 5(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)$; $z_2 = 4(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi)$; $z_3 = 10(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$;

найти $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$. Результат записать в тригонометрической и алгебраической форме;

2. Дано $z = 1-\sqrt{3}i$. Привести число в тригонометрическую форму и вычислить z^{10};

3. Дано число в тригонометрической форме $z = 27\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$. Вычислить $\sqrt[3]{z}$

4. Привести в показательную форму число $3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i$ и вычислить z^4;

5. Найти $\dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$, если $z_1 = 18e^{\frac{3}{2}\pi i}$; $z_2 = 4{,}5e^{\frac{\pi}{2}i}$; $z_3 = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}$;

6. Извлечь корень $\sqrt[4]{z}$, *если* $z = 16e^{\frac{2}{3}\pi i}$. Результат указать в показательной и алгебраической форме;

7. Вычислить: $\dfrac{\left(\cos\frac{5}{14}\pi+i\sin\frac{5}{14}\pi\right)^7}{\left(\cos\frac{7}{8}\pi+i\sin\frac{7}{8}\pi\right)^2}$

Вариант 4

1. Дано $z_1=2(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi)$; $z_2=6(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$; $z_3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$;

   найти $\frac{z_1\cdot z_2}{z_3}$. Результат записать в тригонометрической и алгебраической форме;
2. Дано $z=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$. Привести число в тригонометрическую форму и вычислить z^6;
3. Дано число в тригонометрической форме $z=625\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$. Вычислить $\sqrt[4]{z}$.
4. Привести в показательную форму число $-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}\,i$ и вычислить z^3;
5. Найти $\frac{z_1}{z_2\cdot z_3}$, если $z_1=16e^{\frac{5}{6}\pi i}$; $z_2=4e^{-\frac{\pi}{3}i}$; $z_3=e^{\pi i}$;
6. Извлечь корень $\sqrt[3]{z}$, *если* $z=108e^{\frac{\pi}{2}i}$. Результат указать в показательной и алгебраической форме;
7. Вычислить: $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6}{\left(\cos\frac{4}{15}\pi+i\sin\frac{4}{15}\pi\right)^5}$

Контрольные вопросы

1. Назовите тригонометрическую форму комплексного числа;
2. Какие операции над комплексными числами в тригонометрической форме вы знаете? Перечислите формулы.
3. Назовите формулу Муавра; формулу Эйлера;
4. Назовите показательную форму комплексного числа;
5. Какие операции над комплексными числами в показательной форме вы знаете? Перечислите формулы.

Практическая работа № 12
«Решение задач на вычисление вероятности случайного события и нахождение числовых характеристик дискретной случайной величины»

Цель работы: Научится решать задачи на вычисление вероятности случайного события и нахождение числовых характеристик дискретной случайной величины»

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- определять вероятности события, применять понятия математической логики;

и основные теоремы теории вероятностей при решении задач; применения числовых характеристик случайных величин при решении задач.

знать:

- Какие величины являются случайными; с помощью каких линий изображают законы распределения случайных величин; что называется математическим ожиданием и дисперсией случайной величины; когда распределение случайной величины называется биномиальным; что характеризует математическое ожидание случайной величины.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Вероятность события определяется по формуле $p = \frac{m}{n}$, где n – число всех исходов; m – число благоприятных исходов.

1. При вычислении вероятности события следует помнить, что искомая величина вероятности обладает свойствами:

$$1)\ 0 \le p \le 1;\ \ p \text{ выражают в } \%$$

$$2)\ p(N) = 0 - \text{вероятность невозможного события}$$

$$3)\ p(D) = 1 - \text{вероятность достоверного события}$$

2. Чтобы число выразить в процентах, его нужно поделить на 100%.
3. Чтобы проценты выразить в числах, количество процентов нужно умножить на 100.
4. Если величина вероятности события получается равной дроби, то необходимо числитель дроби поделить на знаменатель, значение округлить и выразить в процентах, оставив два знака после запятой.

Например:

$$\frac{5}{6} = 0{,}8(3) \approx 0{,}8333 \approx 83{,}33\%$$

$$\frac{4}{7} = 0{,}57142... \approx 57{,}14\%$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}(3) \approx 0{,}3333 \approx 33{,}33\%$$

Операции над событиями

1. При определении операции над событиями в рассуждениях следует применять смысловые связки «и», «или». «И» для произведения событий; «или» - для суммы.
2. Обязательно нужно рассматривать все прямые и обратные варианты событий.

Например: I-й прибор работает A_1.

I-й прибор не работает $\overline{A}_1$ и их системы.

$$A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + \ldots$$

Вероятность прямого события обозначают буквой *«p»*, обратного – *«q»*.

3. Применяют формулы:

Сумма вероятностей прямого и обратного событий;

$$p + q = 1$$

Вероятность суммы двух несовместных событий;

$$P\,(A + B) = P(A) + P\,(B)$$

Вероятность произведения двух независимых событий;

$$P \cdot (A \cdot B) = P \cdot (A) \cdot P \cdot (B)$$

Вероятность суммы двух совместных событий;

$$P \cdot (A + B) = P \cdot (A) + P \cdot (B) - P \cdot (A \cdot B)$$

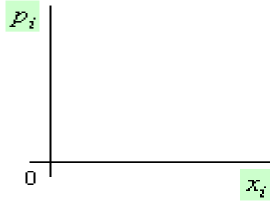
4. В задачах на полную вероятность и формулу Байеса необходимо сначала задать гипотезы, определить условную вероятность события при каждой гипотезе и полную вероятность события.

Вычисления числовых характеристик случайных величин

1. При составлении закона распределения случайной величины сначала необходимо определить числовое значение случайных величин и вероятность их появления, затем данные занести в таблицу:

x_i						
p_i						

2. При построении графика закона распределения случайной величины для наглядности по координатным осям задают соответствующие масштабы. График изображают в системе координат $x_i\ O\ p_i$



3. Математическое ожидание случайной величины вычисляют по формуле:

$$MX = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k$$

n – количество случайных величин.

4. Дисперсию случайной величины вычисляют по формуле:

$$ДX = \sum_{E=1}^{k} (x_i - MX)^2 \cdot p_i = (x_1 - MX)^2 \cdot p_1 + (x_2 - MX)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_k - MX)^2$$

k – количество случайных величин.

5. Для случайных величин сопоставляют закон распределения и изображают его на графике для оценки характера процесса.

6. Для биномиального распределения вероятность вычисляют по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, *p* – вероятность прямого события

$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ *q* – вероятность обратного события.

7. При решении задачи всегда делают проверку по формуле $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Вариант I

1. Среди 120 ламп 15 испорченных. Наугад выбирают 3 лампы. Какова вероятность того, что среди них 2 испорченные?

2. Набирая номер телефона абонент забыл 3 последние цифры. Помня о том, что они различные, он набрал номер наугад. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

1. Завод выпускает 27% продукции высшего сорта, 70% - первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие будет или высшего или первого сорта.

2. В группе 25 студентов, из них отлично учится 5 человек, хорошо – 12, удовлетворительно – 6, слабо -2. Вызывается один по списку. Найдите вероятность того, что он – отличник или хорошист.

5. В лотерее 50 билетов, из них 8 выигрышных. Наугад выбирают 5 билетов. Найти вероятность того. что среди них: а) два выигрышных; б) два проигрышных; в) все выигрышные.

4. Что вероятнее выиграть 6 партий из 10, или 5 партий из 8, если противники равносильны (вероятность выигрыша или проигрыша 50 %)?

5. Случайная величина задана законом распределения:

Xi	8	9	10
Pi	0,4	0,1	0,5

Найти: математическое ожидание и дисперсию случайной величины. Построить график закона распределения.

Вариант II

1. В лотерее 60 билетов, из них 10 выигрышных. Наудачу покупают 15 билетов. Найти Р – вероятность того, что среди них: а) 5проигрышных. б) 3 выигрышных. в) все проигрышные.

2. В ящике 10 белых и 15 черных шаров. На удачу вынимают два шара: найти Р – вероятность того, что:

а) Они оба белые. б) Оба черные. в) 1белый.

3. Станок – автомат производит изделия трёх сортов, изделия первого сорта составляют 5 %, второго сорта – 80%, третьего – 15%. Наугад берут одно изделие. Найти вероятность того, что оно будет первого, второго или третьего сорта.

4. Из чисел 1,2…20 наудачу выбирается число. Найти вероятность того, что это число делится на 2 или 3.

5. В ящике в пять раз больше белых шаров, чем черных. Наугад вынимают один шар. Найти Р – вероятность того, что он красный

. Что вероятнее выиграть 7 партий из 9 или 3 партии из 4, если противники равносильны (вероятность выигрыша или проигрыша 50 %)?

5. Случайная величина задана законом распределения:

Xi	1	2	3
Pi	0,7	0,1	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины. Построить график закона распределения.

Практическая работа № 13

«Решение практических задач с применением статистических методов»

.**Цель работы:** *Закрепить навыки решения задач с применением статистических методов,* формирование умений анализа статистической информации.

Методические рекомендации

1. Таблица должна содержать:
   - текущий номер и название.
   - номер по порядку.
   - наименование строк и столбцов.
   - итоговую строку.
   - строку (столбец) удельного веса единиц совокупности.

2. Расчет удельного веса производится по формуле:

$\eta = \frac{n_i}{N} \cdot 100\%$, где n_i - количество единиц совокупности для i-го интервала ($i = 1,2,3\ldots$), N - объем исследуемой совокупности.

3. Ранжированный ряд строится по убыванию (возрастанию) единиц совокупности.

4. Для построения дискретного ряда необходимо определить варианты (количество баллов), частоту их повторения и удельный вес единиц совокупности.

5. Для построения интервального ряда необходимо вычислить: число интервалов по формуле Старджесса: $n = 1 + 3{,}322\lg N$, где N - объем исследуемой совокупности; величину интервала (пределы изменения варианта) по формуле: $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}$, где $x_{\max}$ - наибольшее значение варианта; $x_{\min}$ - наименьшее значение варианта; n - число интервалов.

Методические рекомендации

1. Таблица статических данных должна содержать:
   - номер;
   - название;

– столбец: номера по порядку;
– содержание строк и столбцов;
– итоговую строку (столбцов);
– строку (столбец) удельного веса единиц совокупности.

2. Полигон распределения строится по дискретному вариационному ряду. Для такого ряда строится в решении задачи таблица, таблице присваивается текущий номер и название.

3. Гистограмма распределения строиться по интервальному вариационному ряду. Для такого ряда в решении задачи проводятся расчеты количества интервалов и пределов изменения варианта по формулам:

– количество интервалов: $n = 1 + 3.322 \lg N$, где N - объем данной совокупности.

– величина интервала: $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}$; n - количество интервалов. Данные заносятся в таблицу. Таблице присваивается текущий номер и название.

Таблица 3 - Дискретный ряд распределения .

Наименование варианта	X_i			
Частота	F_i			

Таблица 4 - Интервальный ряд распределений…
.

Интервал варианта	X_1-X_2	X_2-X_3	
	F_1	F_2	

Вариант I

Задача*:* Имеются данные успеваемости 20 студентов группы по дисциплине «Статистика» за ноябрь месяц 2003/2004 учебного года: 5, 3, 5, 5, 5, 4, 5, 2, 5, 3, 4, 2, 5, 3, 2, 5, 4, 4, 5, 4.

Задание*:*

Построить:

1. Ранжированный ряд данных.
2. Атрибутный ряд распределения успеваемости студентов, выделив в нем группы: 1. успевающие студенты (3 балла и выше); 2. неуспевающие студенты. Данные занести в таблицу:

Таблица 1.- Распределение студентов по уровню успеваемости за ноябрь месяц 2009/2010 учебный год

	Всего	Из них	
		Успевающие студенты, чел.	Неуспевающие студенты, чел.
Количество студентов, чел.			
Удельный вес, % к итогу.			

3. Дискретный и интервальный ряд распределения студентов по успеваемости. Для дискретного и интервального рядов построить таблицы:

Пример таблицы дискретного ряда*:*

Таблица 2 - Дискретный ряд распределения студентов по уровню успеваемости за ноябрь 2009/2010 учебного года.

Баллы									Всего
Количество студентов, чел.									
Удельный вес, % к итогу									

Пример таблицы интервального ряда:

Таблица - 3. Интервальный ряд распределения студентов по баллам успеваемости за ноябрь месяц 2009/2010 учебного года.

№ п/р	Баллы	Количество студентов, чел.	Удельный вес, % к итогу
1			
2			
…	…	…	…
	итого		

Задача № 2. Имеются данные продаж мужской обуви в магазине «Центробувь» за 1 октября 2011 года.

39	37	37	42	40	36	36	42	43	39
44	40	42	42	40	35	38	43	40	40
45	41	44	39	44	35	40	39	40	42
40	40	39	38	43	35	42	39	39	43
40	40	45	38	43	36	42	44	40	40

Построить таблицу. Построить полигон и гистограмму распределений.

Задача № 3. Имеются данные:

Таблица 1 - Объем продаж телевизоров в магазине «Витязь» в период с 2009-2010 гг. .

Год	2002	2003	2004	2005
Объем продаж, шт.	4717	3672	3987	134

Вариант II

Задача*:* известны следующие данные о результатах сдачи абитуриентами вступительных экзаменов на I курс колледжа в 2009/2010 учебном году:

Аттестационные баллы:

10	8	7	10	7	9	10
8	5	10	9	8	5	9
7	9	6	5	10	10	8
8	6	9	7	9	7	9

Задание*:*

Построить:

1. ранжированный ряд данных.
2. атрибутивный ряд распределения поступивших и не поступивших абитуриентов, считая проходной балл 7-10 включительно.

Данные занести в таблицу.

Таблица 4.- Распределение абитуриентов по проходному баллу в 2009/2010 учебном году

	Всего	Из них	
		Поступили в колледж	Не поступили в колледж
Количество абитуриентов, чел.			
Удельный вес, % к итогу			

3. Дискретный и интервальные ряды распределения абитуриентов по результатам сдачи вступительных экзаменов в 2009/2010 учебном году. Для дискретного и интервального рядов построить таблицы.

Пример таблицы дискретного ряда:

Таблица 5- Дискретный ряд распределения абитуриентов по результатам сдачи вступительных экзаменов в 2009/2010 учебном году.

Баллы								Всего
Количество студентов, чел.								
Удельный вес, % к итогу								

Пример таблицы интервального ряда*:*

Таблица 6- Интервальный ряд распределения абитуриентов по результатам сдачи вступительных экзаменов в 2009/2010 учебном году.

№ п/р	баллы	Количество студентов, чел.	Удельный вес, % к итогу
1			
2			
…	…	…	…
	итого		

Задача № 2. Имеются данные таблицы уставного капитала в банках региона за 2010 год.

2351	20218	17469	13354	2351
17469	6110	17469	6110	17469
2351	10700	2351	10700	18465
13354	2950	13354	2950	3315
3315	12092	3315	12092	6110
10700	2950	12092	18465	6110

Построить полигон и гистограмму распределений.

Задача № 3. Имеются данные:

Таблица 2 - Распределение семей города по количеству детей .

Число семей	20	35	10	5
Количество детей	1	2	3	4

2.Построить полигон распределения.

3.Сформулировать вывод в виде указать основные виды представления статистических данных.

Практическая работа №14

«Решение транспортных задач в экономике»

Цель работы : Формирование навыков составления математических моделей транспортных задач; Формирование навыков определения опорных планов транспортных задач методами северо-западного угла, минимальной стоимости и аппроксимации Фогеля; Формирование навыков оптимизации опорных планов транспортных задач.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Транспортной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении минимального значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,, \; j = \overline{1,n} \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m} \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \qquad j = \overline{1,n} \qquad (4)$$

где $c_{ij}, \; a_i, \; b_j c_{ij}, \; a_i, \; b_j$ – заданные постоянные величины.

Модель транспортной задачи называется закрытой, если выполняется равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Опорный план транспортной задачи называется невырожденным, если содержит ровно n+m-1 ненулевое значение.
При заполнении выбранной ячейки таблицы модели транспортной задачи используют правило: Сравниваются количества запасов и потребностей. То количество, которое меньше, записывается в рассматриваемую ячейку. Если это запасы, то из рассмотрения убирается строка, в противном случае убирается столбец. Оставшаяся величина уменьшается на количество, записанное в рассматриваемую ячейку.
В соответствии с методом северо-западного угла для заполнения выбирается ячейка в левом верхнем углу невычеркнутой части таблицы.
В соответствии с методом минимальной стоимости для заполнения выбирается ячейка, тариф перевозок в которой является наименьшим.

В соответствии с методом аппроксимации Фогеля в каждом столбце и каждой строке вычисляются разности между двумя максимальными тарифами. Среди вычисленных разностей выбирается минимальная. В соответствующем элементе таблицы выбирается минимальный тариф – эта ячейка и заполняется.

Транспортной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении минимального значения функции

при условиях

где – заданные постоянные величины.
Модель транспортной задачи называется ***закрытой***, если выполняется равенство .
Опорный план транспортной задачи называется ***невырожденным***, если содержит ровно ***n+m-1*** ненулевое значение.
При заполнении выбранной ячейки таблицы модели транспортной задачи используют ***правило***: *Сравниваются количества запасов и потребностей. То количество, которое меньше, записывается в рассматриваемую ячейку. Если это запасы, то из рассмотрения убирается строка, в противном случае убирается столбец. Оставшаяся величина уменьшается на количество, записанное в рассматриваемую ячейку.*

В соответствии ***с методом северо-западного угла*** для заполнения выбирается ячейка в левом верхнем углу невычеркнутой части таблицы.
В соответствии ***с методом минимальной стоимости*** для заполнения выбирается ячейка, тариф перевозок в которой является наименьшим.
В соответствии ***с методом аппроксимации Фогеля*** в каждом столбце и каждой строке вычисляются разности между двумя максимальными тарифами. Среди вычисленных разностей выбирается минимальная. В соответствующем элементе таблицы выбирается минимальный тариф – эта ячейка и заполняется.

Задание 1.

Установите количество переменных. Составьте целевую функцию. Если по условию задачи требуется определить максимальное значение целевой функции, то используя правила работы с условиями ЗЛП преобразуйте ее так, чтобы она стремилась к минимуму. Составьте и запишите систему ограничений. Запишите условие транспортной задачи в виде таблицы. Определите форму записи модели открытая или закрытая. Если модель является открытой, то измените таблицу так, чтобы модель стала закрытой. Определите опорный план в соответствии с методом северо-западного угла. Проверьте его на не вырожденность. Вычислите значение целевой функции для найденного плана. Определите опорный план в соответствии с методом минимальной стоимости. Проверьте его на не вырожденность. Вычислите значение целевой функции для найденного плана. Определите опорный план в соответствии с методом аппроксимации Фогеля. Проверьте его на не вырожденность. Вычислите значение целевой функции для найденного плана. Установите, какой из найденных планов дает лучший результат. Проверьте его на оптимальность методом потенциалов. Если план не оптимален, то постройте цикл и проведите операцию сдвига по циклу. Вновь полученный план проверьте на оптимальность. Проведите решения до получения оптимального плана. Для него вычислите значение целевой функции.

Пример1:

Задача 1. Непосредственное вычисление. От трех электростанций мощностью 22 МВт, 23 МВт и 48 МВт энергию потребляют четыре населенных пункта с объемами потребления 11 МВт, 17 МВт, 33 МВт и 32 МВт. Составьте такой план электрических сетей, чтобы все населенные пункты были обеспечены электроэнергией, а общие затраты на передачу электроэнергии были минимальны. Стоимость передачи электроэнергии от первой электростанции до каждого населенного пункта составляет 15, 20, 7, 5 тыс. рублей, от второй электростанции – 10, 4, 12, 18 тыс. рублей, от третьей электростанции – 3, 2, 12, 13 тыс. рублей.

Решение:

Количество переменных: 3x4=12.

Целевая
функция:
$$F(x) = 15 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 10 \cdot x_5 + 4 \cdot x_6 + 12 \cdot x_7 + 18 \cdot x_8 + 3 \cdot x_9 + 2 \cdot x_{10} + 12 \cdot x_{11} + 13 \cdot x_{12}$$
$$F(x) = 15 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 10 \cdot x_5 + 4 \cdot x_6 + 12 \cdot x_7 + 18 \cdot x_8 + 3 \cdot x_9 + 2 \cdot x_{10} + 12 \cdot x_{11} + 13 \cdot x_{12}$$
.

По условию задачи $F(x) \to min$$F(x) \to min$.

Система ограничений:

$$\begin{cases} 15 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 22 \\ 10 \cdot x_5 + 4 \cdot x_6 + 12 \cdot x_7 + 18 \cdot x_8 \leq 23 \\ 3 \cdot x_9 + 2 \cdot x_{10} + 12 \cdot x_{11} + 13 \cdot x_{12} \leq 48 \\ 15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_5 + 3 \cdot x_9 \leq 11 \\ 20 \cdot x_2 + 4 \cdot x_6 + 2 \cdot x_{10} \leq 17 \\ 7 \cdot x_3 + 12 \cdot x_7 + 12 \cdot x_{11} \leq 33 \\ 5 \cdot x_4 + 18 \cdot x_8 + 13 \cdot x_{12} \leq 32 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,..,12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 22 \\ 10 \cdot x_5 + 4 \cdot x_6 + 12 \cdot x_7 + 18 \cdot x_8 \leq 23 \\ 3 \cdot x_9 + 2 \cdot x_{10} + 12 \cdot x_{11} + 13 \cdot x_{12} \leq 48 \\ 15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_5 + 3 \cdot x_9 \leq 11 \\ 20 \cdot x_2 + 4 \cdot x_6 + 2 \cdot x_{10} \leq 17 \\ 7 \cdot x_3 + 12 \cdot x_7 + 12 \cdot x_{11} \leq 33 \\ 5 \cdot x_4 + 18 \cdot x_8 + 13 \cdot x_{12} \leq 32 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,..,12 \end{cases}$$
.

Запишем в виде таблицы:

Электростанции	Населенные пункты				
B_1	B_2	B_3	B_4		
11	17	33	32		
A_1	22	15	20	7	5
A_2	23	10	4	12	18
A_3	48	3	2	12	13

Определим форму записи модели:

$\sum_{i=1}^{3} a_i = 22 + 23 + 48 = 93$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 22 + 23 + 48 = 93$

$\sum_{j=1}^{4} b_j = 11 + 17 + 33 + 32 = 93$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 11 + 17 + 33 + 32 = 93$, модель закрытая.

Определим опорный план.

Метод северо-западного угла:

Электростанции	Населенные пункты				
B_1	B_2	B_3	B_4		
11	17	33	32		
A_1	22	15 11	20 11	7 0	5 0
A_2	23	10 0	4 6	12 17	18 0
A_3	48	3 0	2 0	12 16	13 32

$x_1 = \min(22;11) = 11 \rightarrow x_2 = \min(11;17) = 11 \rightarrow$
$x_1 = \min(22;11) = 11 \rightarrow x_2 = \min(11;17) = 11 \rightarrow$ первая строка закрыта ($x_3 = 0,\ x_4 = 0 x_3 = 0,\ x_4 = 0$); первый столбец закрыт ($x_5 = 0, x_9 = 0 x_5 = 0, x_9 = 0$);

$x_6 = \min(23;6) = 6 \rightarrow x_7 = \min(17;33) = 17 \rightarrow$
$x_6 = \min(23;6) = 6 \rightarrow x_7 = \min(17;33) = 17 \rightarrow$ вторая строка закрыта ($x_8 = 0 x_8 = 0$); второй столбец закрыт ($x_{10} = 0 x_{10} = 0$);

$x_{11} = \min(48;16) = 16 \rightarrow x_{12} = \min(32;32) = 32 \rightarrow$
$x_{11} = \min(48;16) = 16 \rightarrow x_{12} = \min(32;32) = 32 \rightarrow$ третья строка закрыта.

Значение целевой функции для найденного плана:

$$F(x) = 15 \cdot 11 + 20 \cdot 11 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 12 \cdot 17 + 18 \cdot 0 +$$
$$F(x) = 15 \cdot 11 + 20 \cdot 11 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 12 \cdot 17 + 18 \cdot 0 +$$

$$+3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 12 \cdot 16 + 13 \cdot 32 = 165 + 220 + 24 + 204 + 182 + 416 =$$
$$+3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 12 \cdot 16 + 13 \cdot 32 = 165 + 220 + 24 + 204 + 182 + 416 =$$

$= 1211$$= 1211$ тыс. рублей.

Метод минимальной стоимости:

Электростанции	Населенные пункты				
B_1	B_2	B_3	B_4		
11	17	33	32		
A_1	22	15 0	20 0	7 0	5 22
A_2	23	10 0	4 0	12 13	18 10
A_3	48	3 11	2 17	12 20	13 0

$$\min c_{ij} = c_{32} = 2 \rightarrow x_{10} = \min(48; 17) = 17 \rightarrow x_9 = \min(31; 11) = 11 \rightarrow$$
$$\min c_{ij} = c_{32} = 2 \rightarrow x_{10} = \min(48; 17) = 17 \rightarrow x_9 = \min(31; 11) = 11 \rightarrow$$

$x_{10} = \min(20;33) = 20 \to$ $x_{10} = \min(20;33) = 20 \to$ третья строка закрыта ($x_{12} = 0$ $x_{12} = 0$); первый столбец закрыт ($x_1 = 0,\ x_5 = 0$ $x_1 = 0,\ x_5 = 0$); второй столбец закрыт ($x_2 = 0,\ x_6 = 0$ $x_2 = 0,\ x_6 = 0$);

$\min(c_{13}, c_{14}, c_{23}, c_{24}) = c_{14} = 5 \to x_4 = \min(22;32) = 22 \to$
$\min(c_{13}, c_{14}, c_{23}, c_{24}) = c_{14} = 5 \to x_4 = \min(22;32) = 22 \to$ первая строка закрыта ($x_3 = 0$ $x_3 = 0$);

$\min(c_{23}, c_{24}) = c_{23} = 18 \to x_7 = \min(23;13) = 13 \to$
$\min(c_{23}, c_{24}) = c_{23} = 18 \to x_7 = \min(23;13) = 13 \to$

$x_8 = \min(10;10) = 10 \to$ $x_8 = \min(10;10) = 10 \to$ вторая строка закрыта.

Значение целевой функции для найденного плана:

$F(x) = 15 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 22 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 12 \cdot 13 + 18 \cdot 10 +$
$F(x) = 15 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 22 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 12 \cdot 13 + 18 \cdot 10 +$

$+3 \cdot 11 + 2 \cdot 17 + 12 \cdot 20 + 13 \cdot 0 = 110 + 156 + 180 + 33 + 34 + 240 =$
$+3 \cdot 11 + 2 \cdot 17 + 12 \cdot 20 + 13 \cdot 0 = 110 + 156 + 180 + 33 + 34 + 240 =$

$= 753$ $= 753$ тыс. рублей.

Метод аппроксимации Фогеля:

Электро-станции	Населенные пункты		
B_1	B_2	B_3	B_4
11	17	33	32

A_1	22	15 0	20 0	7 0	5 22	5	8	-	-
A_2	23	10 0	4 0	12 23	18 0	6	6	6	6
A_3	48	3 11	2 17	12 10	13 10	1	1	1	1
5	16	5	5						
5	-	5	5						
7	-	0	5						
-	-	0	5						

$\max(5,16,6,1) = 16 \rightarrow \max(5,16,6,1) = 16 \rightarrow$ выбираем второй столбец $\rightarrow \min(2,4,20) = 2 \rightarrow\rightarrow \min(2,4,20) = 2 \rightarrow$

$x_{10} = \min(48,17) = 17 \rightarrow x_{10} = \min(48,17) = 17 \rightarrow$ второй столбец закрыт ($x_2 = 0,\ x_6 = 0 x_2 = 0,\ x_6 = 0$);

$\max(5,8,6,1) = 8 \rightarrow \max(5,8,6,1) = 8 \rightarrow$ выбираем первую строку $\rightarrow \min(15,7,5) = 5 \rightarrow$ $\rightarrow \min(15,7,5) = 5 \rightarrow$

$x_4 = \min(22,32) = 22 \rightarrow x_4 = \min(22,32) = 22 \rightarrow$ первая строка закрыта ($x_1 = 0,\ x_3 = 0 x_1 = 0,\ x_3 = 0$);

$\max(7,5,6,1,0) = 7 \rightarrow \max(7,5,6,1,0) = 7 \rightarrow$ выбираем первый столбец $\rightarrow \min(3,10) = 3 \rightarrow \rightarrow \min(3,10) = 3 \rightarrow$

$x_9 = \min(31,11) = 11 \rightarrow x_9 = \min(31,11) = 11 \rightarrow$ первый столбец закрыт ($x_5 = 0 x_5 = 0$);

$\max(5,6,1,0) = 6 \rightarrow \max(5,6,1,0) = 6 \rightarrow$ выбираем вторую строку $\rightarrow \min(12,18) = 12 \rightarrow \rightarrow \min(12,18) = 12 \rightarrow$

$x_7 = \min(23,33) = 23 \rightarrow x_7 = \min(23,33) = 23 \rightarrow$ вторая строка закрыта ($x_{85} = 0$ $x_{85} = 0$);

$\min(12,13) = 12 \rightarrow x_{11} = \min(20,10) = 10 \rightarrow$
$\min(12,13) = 12 \rightarrow x_{11} = \min(20,10) = 10 \rightarrow$ третий столбец закрыт; $x_{12} = \min(10,10) = 10 x_{12} = \min(10,10) = 10$.

Значение целевой функции для найденного плана:

$F(x) = 15\cdot 0 + 20\cdot 0 + 7\cdot 0 + 5\cdot 22 + 10\cdot 0 + 4\cdot 0 + 12\cdot 23 + 18\cdot 0 +$
$F(x) = 15\cdot 0 + 20\cdot 0 + 7\cdot 0 + 5\cdot 22 + 10\cdot 0 + 4\cdot 0 + 12\cdot 23 + 18\cdot 0 +$

$+3\cdot 11 + 2\cdot 17 + 12\cdot 10 + 13\cdot 10 = 110 + 276 + 33 + 34 + 120 + 130 =$
$+3\cdot 11 + 2\cdot 17 + 12\cdot 10 + 13\cdot 10 = 110 + 276 + 33 + 34 + 120 + 130 =$

$= 703 = 703$ тыс. рублей.

Лучший результат: $F(x) = 703 F(x) = 703$ тыс. рублей.

Проверим его на оптимальность методом потенциалов.

Составим систему уравнений для каждой заполненной клетки:

$\beta_4 - \alpha_1 = 5 \beta_4 - \alpha_1 = 5$, $\beta_3 - \alpha_2 = 12 \beta_3 - \alpha_2 = 12$, $\beta_1 - \alpha_3 = 3 \beta_1 - \alpha_3 = 3$,

$\beta_2 - \alpha_3 = 2 \beta_2 - \alpha_3 = 2$, $\beta_3 - \alpha_3 = 12 \beta_3 - \alpha_3 = 12$, $\beta_4 - \alpha_3 = 13 \beta_4 - \alpha_3 = 13$.

Пусть $\alpha_1 = 0\alpha_1 = 0$, тогда $\beta_4 = 5\beta_4 = 5$, $\alpha_3 = -8\alpha_3 = -8$, $\beta_3 = 4\beta_3 = 4$, $\beta_2 = -6$ $\beta_2 = -6$, $\beta_1 = -5\beta_1 = -5$, $\alpha_2 = -8\alpha_2 = -8$.

Для каждой свободной клетки вычислим $\alpha_{ij}\alpha_{ij}$.

$\alpha_{11} = \beta_1 - \alpha_1 - c_{11} = -5 - 0 - 15 = -20\alpha_{11} = \beta_1 - \alpha_1 - c_{11} = -5 - 0 - 15 = -20$,

$\alpha_{12} = \beta_2 - \alpha_1 - c_{12} = -6 - 0 - 20 = -26$
$\alpha_{12} = \beta_2 - \alpha_1 - c_{12} = -6 - 0 - 20 = -26$,

$\alpha_{13} = \beta_3 - \alpha_1 - c_{13} = 4 - 0 - 7 = -3\alpha_{13} = \beta_3 - \alpha_1 - c_{13} = 4 - 0 - 7 = -3$,

$\alpha_{21} = \beta_1 - \alpha_2 - c_{21} = -5 + 8 - 10 = -7\alpha_{21} = \beta_1 - \alpha_2 - c_{21} = -5 + 8 - 10 = -7$,

$\alpha_{22} = \beta_2 - \alpha_2 - c_{22} = -6 + 8 - 4 = -2\alpha_{22} = \beta_2 - \alpha_2 - c_{22} = -6 + 8 - 4 = -2$,

$\alpha_{24} = \beta_4 - \alpha_2 - c_{24} = 5 + 8 - 18 = -5\alpha_{24} = \beta_4 - \alpha_2 - c_{24} = 5 + 8 - 18 = -5$.

Так как все найденные $\alpha_{ij} \le 0\alpha_{ij} \le 0$, то найденный план является оптимальным.

Ответ: $F(x) = 15 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 22 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 12 \cdot 23 +$
$F(x) = 15 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 22 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 12 \cdot 23 +$

$+18 \cdot 0 + 3 \cdot 11 + 2 \cdot 17 + 12 \cdot 10 + 13 \cdot 10 = 703$
$+18 \cdot 0 + 3 \cdot 11 + 2 \cdot 17 + 12 \cdot 10 + 13 \cdot 10 = 703$ тыс. рублей.

Задания для практического занятия:

ЗАДАЧА №1. Используя метод минимального тарифа, представить первоначальный план для решения транспортной задачи. Проверить на оптимальность, используя метод потенциалов.

	30	50	70	10	30	10
40	2	4	6	1	1	2
80	3	4	5	9	9	6
60	4	3	2	7	8	7
20	5	1	3	5	7	9

ЗАДАЧА №2. Четыре кондитерские фабрики могут производить три вида кондитерских изделий. Затраты на производство одного центнера (ц) кондитерских изделий каждой фабрикой, производственные мощности фабрик (ц в месяц) и суточные потребности в кондитерских изделиях (ц в месяц) указаны в таблице. Составить план производства кондитерских изделий, минимизирующий суммарные затраты на производство.

Кондитерская фабрика	Стоимость производства одного центнера кондитерских изделий			Месячная производительность кондитерских изделий
	1	2	3	
1	3	4	3	30
2	2	3	5	20
3	1	2	3	10
4	4	5	8	30
Месячная потребность в кондитерских изделиях	30	20	30	

Примечание. Здесь предварительно можно транспонировать таблицу затрат, поскольку для классической постановки транспортной задачи сначала следуют мощности (производство), а потом потребители.

Кондитерская фабрика	Стоимость производства одного центнера кондитерских изделий				Месячная потребность в кондитерских изделиях
	1	2	3	4	
1	3	2	1	4	30
2	4	3	2	5	20
3	3	5	3	8	30
Месячная производительность кондитерских изделий	30	20	10	30	

ЗАДАЧА №3. На строительство объектов кирпич поступает с трех (I, II, III) заводов. Заводы имеют на складах соответственно 50, 100 и 50 тыс. шт. кирпича. Объекты требуют соответственно 50, 70, 40 и 40 тыс. шт. кирпича. Тарифы (ден. ед./тыс.шт.) приведены в таблице. Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

Завод	Тариф, ден. ед./тыс.шт.				Запасы
	1	2	3	4	
I	2	6	2	3	50

II	5	2	1	7	100
III	4	5	7	8	50
Потребности	50	70	40	40	

Контрольные вопросы

1. В чем суть оптимизационной модели перевозки грузов?
2. Как представляется математическая модель перевозки грузов в ПП «Поиск решения»?

Тест № 1. Линейная алгебра

1. Выберите правильный ответ. Если матрица A= $\begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{matrix}$, то матрица *4A* имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$

4. Выберите правильный ответ. При умножении матрицы А на матрицу В должно соблюдаться условие:

а) число строк матрицы А равно числу строк матрицы В

б) число строк матрицы А равно числу столбцов матрицы В

в) число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В

г) верный ответ отсутствует

5. Распределите матрицы в порядке увеличения их определителей:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ б)

в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Выберите правильный ответ. Если матрица системы *n* уравнений квадратная и ее определитель не равен нулю, то система: а) не имеет решений

б) имеет единственное решение

в) имеет ровно n решений

г) верный ответ отсутствует

7. Выберите правильный ответ. При решении системы по правилу Крамера используют формулы:

$x_i = \Delta - \Delta_i$

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ а) б) $x_i = \Delta_i \cdot \Delta$

в) г) верный ответ отсутствует

8. Укажите верные утверждения, связанные с определением и существованием обратной матрицы:

а) обратная матрица A^{-1} существует, если матрица A – квадратная и $\det A \neq 0$

б) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица соответствующего размера

в) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = A$

г) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$

9. Найдите определитель матрицы A= $\begin{matrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{matrix}$.

10. Выберите правильный ответ. Если матрица A= $\begin{matrix} 2 & -4 \\ 6 & -2 \end{matrix}$, то

матрица A^2 имеет вид:

а) $\begin{matrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{matrix}$ в) $\begin{matrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{matrix}$

б) $\begin{matrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{matrix}$ г) $\begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix}$

11. Для матрицы A= $\begin{matrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$ указать сумму элементов, расположенных на побочной диагонали:

12. Для матрицы A= $\begin{matrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$ указать сумму элементов, расположенных на главной диагонали:

13. Установите соответствие между парой матрицей А и В и их произведением $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

б)

в)

г) $A = \Big($

14. Выберите правильный ответ. Решение системы $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$ по правилу Крамера имеет вид:

а) Δ=^{1} 3	2 ; Δxx=13 −4	−2 ; Δ$_{yy}$=−−^{1}3 ^{2}4 ; 4
б) Δ=^{1} 3	2 ; Δxx=13 −4	2 ;Δyy=2 2 ; 7 7 4
в) Δ=^{1} 3	2 ; Δxx=2 −4 7	2 ; Δ$_{yy}$=^{1}3 ^{2}7 ; −4

г) Δ=^{1}3 −^{2}4; Δ$_{xx}$=^{1}3 ^{2}4;Δ$_{yy}$=^{2}7 ^{2}7 15. Выберите правильный ответ. Определитель

матрицы системы
$2xx + 3yy = 1 \; -3xx - 4yy = 0$ равен:

а) 3 б) 0 в) -1 г) 1

16. Выберите правильные ответы. При решении систем линейных уравнений используются методы:

а) Крамера б) Гаусса
в) математической индукции г) прогрессии

Раздел 2 Математический анализ

Тест 2 «Дифференциальное исчисление»

1. Дополните: пусть функция *y = f(x)* определена в некоторой окрестности точки x_0, тогда конечный предел отношения приращения функции *Δy* к приращению аргумента при

стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует, называется …функции $y = f(x)$ в точке x_o.

2. Выберите правильный ответ. Если функция в точке a имеет конечную производную, то уравнение касательной имеет вид:

а) $y = f(a) - f'(a)(x - a)$

б) $y = f(a) + f'(a)(x + a)$

в) $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

г) $y = f'(a) + f(a)(x - a)$

3. Установите соответствие между функциями и их производными:

а) $y = xx^{nn}$ 1) $yy^{/} = -ssssss\ xx$

б) $y = \cos xx$ 2) $yy^{/} = \cos xx$

в) $y = lnx$ 3) $yy^{/} = {}_{xx}{-}^{1}$

г) $y = sin\ x$ 4) $yy^{/} = ssxx^{nn-1}$

4. Выберите правильный ответ. Производная функции $y = x^2 \cdot e^x$ равна:

$2x \cdot e^x + x^3 \cdot e^{x-1}$ $2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x$ $2x + e^x$ а) в)

б) г)

5. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 4$ в точке $x_0 = -1$:

6. Выберите правильный ответ. Вторая производная функции $y = e^x + x^2 - 1$ равна:

а) e^x в) $e^x + 2$

б) $e^x + 1$ г) 2

7. Выберите правильный ответ. Производная функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$ равна:

$\dfrac{1 + \ln x}{x^2}$ $\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1 + \ln x}{x}$ а) $\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ в)

б) г)

8. Выберите правильный ответ. Вторая производная функции $yy = \sin xx + \cos xx$ равна:

а) $\sin xx + \cos xx$ в) 3

б) $-\sin xx - \cos xx$ г) $4xx$

9. Вторая производная функции $yy = xx^2 + 3xx - 5$ равна…

10. Выберите правильный ответ. Дифференциал функции $yy = xx^2 + 3xx - 5$ равен:

а) $ddyy = (xx^2 + 3xx - 5)ddxx$ в) $ddyy = (3xx - 5)ddxx$

б) $ddyy = (2xx + 3)ddxx$ г) $ddyy = (xx^2 - 5)ddxx$

11. Установите соответствие между функциями и их производными:

а) $yy = xx^2 + 3xx - 5$ 1) $-2xx - 12xx^3 - 10xx$

б) $yy = xx^3 + 6xx - 10$ 2) $2xx + 3$

в) $yy = -xx^5 + 3xx^2 - 5xx$ 3) $3xx^2 + 6xx$

г) $yy = -xx^2 - 3xx^4 - 5xx^2$ 4) $-5xx^4 + 6xx - 5$

12. Установите соответствие между правилами дифференцирования:

а) $xx^{/}$ 1) $uu/vv - vv_{vv}2 \; /uu$

б) $(uu + vv)^{/}$ 2) 1

в) $(uu \cdot vv)^{/}$ 3) $uu^{/} + vv^{/}$

$-uu \; /$ 4) $u^{/}vv + vv^{/}uu$

г) $()$

vv

13. Графиком функции $yy = aaxx^2 + bbxx + cc$ называется…

14. Установите соответствие между функциями и их графиками:

1

а) $yy = xx -$ 1) кубическая парабола

б) $yy = xx^3$ 2) прямая

в) $yy = \sin xx$ 3) гипербола

г) $yy = kkxx + bb$ 4) синусоида

15. Выберите правильный ответ. Функция $yy = 5xx + 6$ является:

а) периодической в) непрерывной

б) разрывной г) четной

16. Выберите правильные ответы. Функция $yy = xx^2$ является:

а) периодической в) непрерывной

б) разрывной г) четной

17. Выберите правильные ответы. Функция $yy = xx^3$ является:

а) непрерывной в) периодической

б) нечетной г) разрывной

18. Выберите правильные ответы. Асимптоты для графиков функций бывают:

а) вертикальные в) наклонные

б) горизонтальные г) параболические

19. Выберите правильные ответы. Экстремумами функции называются:

а) максимум функции в) нули функции
б) минимум функции г) любые точки функции

20. Выберите правильный ответ. Точка x_0является точкой максимума функции, если в ней производная равна 0 и:

а) меняет знак с «-» на «+» в) не меняет знак
б) меняет знак с «+» на «-» г) нет правильного ответа

21. Выберите правильный ответ. Точка x_0является точкой минимума функции, если в ней производная равна 0 и:

а) меняет знак с «-» на «+» в) не меняет знак
б) меняет знак с «+» на «-» г) нет правильного ответа

22. Выберите правильный ответ. Для нахождения точек перегиба графика функции вычисляют:

а) первую производную функции
б) нули функции
в) вторую производную функции
г) нет правильного ответа

23. Выберите правильный ответ. Для нахождения точек экстремума функции вычисляют:

а) первую производную функции
б) нули функции
в) вторую производную функции
г) нет правильного ответа

24. В точке экстремума дифференцируемой функции ее первая производная равна:

25. В точке экстремума дифференцируемой функции ее вторая производная равна:

Тест 3 «Интегральное исчисление»

1. Установите соответствие между неопределенными интегралами и соответствующей совокупностью первообразных:

$tgx+c,\ x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$ $\int x^n dx$

$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ (n\neq -1)$ $\int \frac{dx}{cos^2 x}$ а) 1)

б) 2)

в) $\int \sin xx\, ddxx$ 3) $\sin xx + CC$

г) $\int \cos xx\, ddxx$ 4) $-\cos xx + CC$

2. Установите соответствие между неопределенными интегралами и соответствующей совокупностью первообразных:

а) $\int ee^{xx}\, ddxx$ 1) $lnx+C$

б) $\int \frac{ddxx}{xx}$ 2) $tgx+C$

в) $\int aa^{xx} ddxx$ 3) $e^{xx} + CC$

г) $\int \frac{ddxx}{}{}^2$ 4) $\frac{aa^{xx}}{lnnaa} + CC$ $\cos xx$

3. Выберите правильные ответы. Верными являются следующие свойства неопределённого интеграла:

а) $\int (kf(x))\,dx = k\int f(x)dx$ (k=const)

б) $\int \big(f(x)g(x)\big)dx = \left(\int f(x)dx\right)\left(\int g(x)dx\right)$

в) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$, g(x)≠0

г) $\int \big(f(x)\pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4. Выберите правильный ответ. Найдите интеграл $\int \frac{dd}{x^3}$:

$\frac{x^2}{2}+c$ -3x^{-4}+c

$\frac{1}{2x^2}$+c $-\frac{1}{2x^2}$+c а) в)

б) г)

5. Выберите правильный ответ. Найдите интеграл $\int xx^3\, ddxx$:

$\frac{x^2}{2}+c$ -3x^{-4}+c

$\frac{1}{2x^2}$+c $\frac{x^4}{}$ а) в)

б) $_4 + CC$ г)

6. Выберите правильный ответ. Найдите интеграл $\int 4xx^2\, ddxx$:

——

— —а) $xx^3 + CC$ в)$^{4xx}{}_3 3 + CC$

3

$xx4$ $xx4$

б) $+ CC$ г) $- {}_4 + CC {}_4$

7. Выберите правильные ответы. К методам интегрирования относятся:

а) метод подстановки

б) метод интегрирования по частям

в) метод математической индукции

г) метод параллельных прямых

8. Выберите правильный ответ. Формула Ньютона-Лейбница имеет вид:

bb

а)$\int_{aa} ff(xx)\, ddxx = FF(bb) - FF(aa)$

bb

б) $\int_{aa} ff(xx)\, ddxx = ff(bb) - ff(aa)$

bb

в) $\int_{aa} ff(xx)\, ddxx = FF(aa) - FF(bb)$

bb

г) $\int_{aa} ff(xx)\, ddxx = ff(aa) - ff(bb)$

9. Выберите правильный ответ. Формула Ньютона-Лейбница применяется для нахождения:

а) неопределенного интеграла

б) определенного интеграла

в) производной функции

г) первообразной функции

10. Выберите правильный ответ. Найдите интеграл $\int_0^1 x^2\, dx$:

а) 0 б) 5 в)$\frac{1}{3}$ г) -1

11. Выберите правильный ответ. Формула метода интегрирования по частям имеет вид:

uu

а)$\int uuddvv = uuvv - \int vvdduu$в)$\int uuddvv = uuvv - {}_{-vv}$

vv

б) $\int uuddvv = uuvv + \int vvdduu$г) $\int uuddvv = uuvv + {}_{uu}$

12. Найдите интеграл $\int_0^1 3x^2\, dx$:

13. Выберите правильный ответ. Геометрический смысл

bb определенного интеграла $\int_{aa} ff(xx)\, ddxx$заключается в следующем:

а) определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной подынтегральной функцией, прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью

Ox

б) определенный интеграл равен периметру криволинейной трапеции, ограниченной подынтегральной функцией, прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox

в) определенный интеграл равен периметру прямоугольника, ограниченного прямыми $x=a$ и $x=b$

г) определенный интеграл равен площади прямоугольника, ограниченного прямыми $x=a$ и $x=b$

14. Выберите правильный ответ. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=6x-x^2$, y = 0:

а) 6 в) $\frac{1}{3}$

б) 5 г)36

15. Выберите правильный ответ. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 5x$,$x = 2$ и осью Ox:

а) 2 в) -14

б)10 г) -36

16. Найдите интеграл$\int_0^1 5x^4\,dx$:

17. Найдите интеграл$\int_1^2 4\,dx$:

18. Установите соответствие между определенными интегралами и соответствующими значениями:

а) $\int_1^{2} \frac{ddxx}{xx}$ 1) 3

б) $\int_1^2 (x^2+x)ddxx$ 2) 1

в) $\int_0^1 3ddxx$ 3) $\frac{23}{6}$

г) $\int_0^1 2x\,dx$4) $ln\ 2$

19. Выберите правильный ответ. Число a в определенном интеграле

$\int_{aa}^{bb} ff(xx)\ ddxx$ называется:

а) подынтегральной функцией

б) нижний предел интегрирования

в) верхний предел интегрирования

г) дифференциал функции

20. Выберите правильный ответ. Число b в определенном интеграле

$\int_{aa}^{bb} ff(xx)\ ddxx$ называется:

а) подынтегральной функцией

б) нижний предел интегрирования

в) верхний предел интегрирования
г) дифференциал функции

21. Выберите правильный ответ. Функция $ff(xx)$ в определенном интеграле $\int_{aa}^{bb} ff(xx)\, ddxx$ называется:

а) подынтегральной функцией
б) интегральной функцией
в) производной функцией
г) линейной функцией

22. Выберите правильный ответ. Найдите интеграл $\int (4xx^2 - 3xx + 2)\, ddxx$:

а) $\frac{xx^3}{3} + CC$

б) $\frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + CC$

в) $-\frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2xx$

г) $-\frac{xx^4}{4} + CC$

25. Найдите интеграл $\int_{-1}^{1} 4x^3\, dx$:

26. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми *y = 2x, x =1* и осью *Ox*:

27. Установите соответствие между определенными интегралами и соответствующими значениями:

а) $\int_2^3 \frac{dx}{x}$ 1) 7

б) $\int_0^2 (x^3 - 3x)dx$ 2) 2

в) $\int_0^1 7\, dx$ 3) -2

г) $\int_0^1 (2x+1)\, dx$ 4) *ln 3-ln 2*

28. Выберите правильный ответ. Выражение $ddxx$ в определенном интеграле $\int_{aa} ff(xx)\, ddxx$ называется:

23. Выберите правильный ответ.
Найдите интеграл $\int (-7xx + 8)\, ddxx$:

а) $\frac{xx2}{2} + 8 + CC$

б) $\frac{xx2}{2} + 8$

в) $-\frac{7x^2}{2} + 8x + CC$

г) $\frac{7x^2}{2} + 8x + CC$

24. Выберите правильный ответ. Найдите интеграл
$\int (2\sin xx - 3\cos xx + 1)\, ddxx$: а) $\sin xx - 3\cos xx + CC$
б)$-2\cos xx - 3\sin xx + xx + C$
в) $2\sin xx - 3\cos xx + xx + CC$
г) $2\sin xx - 3\cos xx - xx + CC$

а) подынтегральной функцией
б) нижний предел интегрирования
в) верхний предел интегрирования
г) дифференциал функции

Тест 4 Дискретная математика

1. Выберете правильный ответ. Заданы множества Х=$\{0,1\}$ и У=$\{x; y\}$ множество $X \times У$ имеет вид…

а) $X \times У = \{(0,x),(0,y),(1,x)(1,y)\}$

б) $X \times У = \{(0,0),(1,1),(x,x)(y,y)\}$

в) $X \times У = \{(x,0),(y,0),(x,1)(y,1)\}$

г) $X \times У = \{(0,1),(1,1),(1,0)(0,0)\}$

2. Выберете правильный ответ. Объединением множеств A и B называется множество…

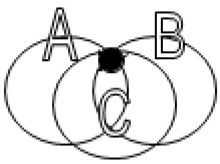
а) $\{ xx \in A$ или $x \in B \}$

б) $\{ xx \in A$ и $x \in B \}$

в) $\{ xx \in A$ и $x \notin B \}$

г) $\{ xx \notin A$ и $x \in B \}$

3. Выберете правильный ответ. Какая операция над множествами A, B, и C изображена на диаграмме



а) $(A \cup B) \cup C$;

б) $(A \cap B) \cap C$;

в) $(A \backslash B) \cap C$;

г) $(A \cap B) \cup C$;

4. Найдите мощность множества X ={1,3,6}

5. Выберете правильный ответ. Выбрать операцию алгебры логики, задаваемую таблицей истинности:

а	в	с
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

а) с=а∨в
б) с=а⇔в
в) с=а∧в
г) с=а⇒в

6. Выберете правильный ответ. Выбрать множество С, если A = {1;2;3}; B = {2;3;4;}; C = {1;2;3;4}
а) B\A
б) A\B
в) A I B
г) AUB

Тест 5 Комплексные числа

1. Выберите правильные ответы. Корнями уравнения $y^2+2y+10=0$ являются:

а) *4*

б) *-1+3i*
в) *-1-3i*
г) *2*

2. Задано комплексное число $z = x + iy$. Выберете верные

утверждения, касающиеся $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|$
$\operatorname{Re} z = x$ в) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\operatorname{Im} z = y$ г) $|z| = |x| + |y|$ а)

б)

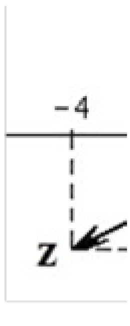
3. Выберите правильный ответ. Умножение комплексных чисел z_1 и z_2, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле:

$|z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
$|z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 \cdot \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 \cdot \varphi_2))$
$(|z_1| + |z_2|) \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ а)

б)

в)
г) верный ответ отсутствует

4. Выберите правильный ответ. Алгебраическая форма комплексного числа z, изображенного на рисунке, имеет вид:



5. Установите соответствие между комплексным числом z и комплексно-сопряженным к нему $z\bar{z}$:

а) $z=1-i$ 1) $z\bar{z}=2+2i$
б) $z=2-2i$ 2) $z\bar{z}=1+i$
в) $z=-3-4i$ 3) $z\bar{z}=-4-6i$
г) $z=-4+6i$ 4) $z\bar{z}=-3+4i$

6. Дополните: модуль комплексного числа *z=-3-4i* равен…

7. Дополните: для комплексного числа *z=1+i* аргумент $\varphi = \arg z$ (в градусах) будет равен:

8. Выберите правильный ответ. Найдите сумму комплексных чисел
zz_1 =*5-6i* и $zz_2 = 6 - 8ss$: а) $(zz_1 + zz_2)$ =*11-14i*
б) $(zz_1 + zz_2)$ =*11+14i*
в) $(zz_1 + zz_2)$ =*11*
г) $(zz_1 + zz_2)$ =*14i*

Тест 5 Теории вероятностей и математической статистики

Тема 5.1 «Основные понятия теории вероятностей»

1. Выберете правильный ответ. Испытанием являются…
а) подбрасывание игральной кости
б) выпадение орла при подбрасывании монеты
в) вытаскивание шара из урны, в которой три черных и семь белых шаров
г) выстрел по мишени

2. Установите соответствие…
а) число размещений из n по m(без повторений) 1) n!

n!

б) число перестановок 2) m!(n−m)!

в) число сочетаний из n по m 3) (n−mn!)!

г) число размещений из n по m(с повторениями) 4) ss^{mm}

3. Выберете правильный ответ. Два события *A* и *B* называются …, если появление одного из них меняет вероятность появления другого а) зависимыми
б) противоположными
в) независимыми
г) совместными

4. Выберете правильные ответы. Укажите дискретные случайные величины
а) число очков, выпавшее при подбрасывании игральной кости
б) дальность полета артиллерийского снаряда
в) рост студента
г) оценка, полученная студентом на экзамене по теории вероятностей

5. Дополните. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	-2	0	5
P	0,2	0,3	0,5

Математическое ожидание $M(X)$ равно…

6. **.** Рассмотрим испытание: подбрасывается игральная кость. Установите соответствие:

а) достоверное событие 1) Выпало 3 очка

б) невозможное событие 2) Выпало больше 6 очков

3) Выпало меньше 6 очков

4) Выпало четное число очков

7. Дополните. Количество различных трехзначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, равно…

8. Дополните. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается пять выигрышей по 500 рублей, пять выигрышей по 400 рублей и десять выигрышей по 100 рублей. Если X – сумма выигрыша владельца одного лотерейного билета, то вероятность

события $(XX=^{0})$ равна … 9. Выберете правильный ответ. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	0	x_2	9
P	0,1	0,5	0,4

Если математическое ожидание $M(X)$ = 5.6, то значение x_2 равно …

а) 4

б) 6

в) 3

г) 5

10. Дополните. Бросают две монеты. Событие A – герб выпал на первой монете; событие B – герб выпал на второй монете. Вероятность события $A+B$ равна…

11. Выберете правильный ответ. В первой урне 4 черных и 6 белых шаров. Во второй урне 3 белых и 7 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна…

а) 0.45 в) 0.4

б) 0.15 г) 0.9

Тема 5.2 «Элементы математической статистики» 1. Выберете правильный ответ. Совокупность наблюдений, отобранных случайным образом из генеральной совокупности, называется… а) репрезентативной

б) выборкой

в) частотой

г) вариантой

2. Дополните. Объем выборки 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 6 равен …

3. Выберете правильный ответ. Произведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 2, 3, 8, 8. Тогда выборочная средняя равна …

а) 5

б) 6

в) 5.5

г) 5.25

4. Выберете правильный ответ. Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 11. Тогда его интервальная оценка может иметь вид…

а) (10.5;11.5)

б) (11;11.5)

в) (10.5; 10.9)

г) (10.5;11)

5. Установите соответствие между числовыми характеристиками и формулами k

а) $\bar{x}$ 1) $\sum_{i=1} x_i n_i$

$\sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}$ б) D_x 2) $x-\bar{x}$

в) σ_x 3) $\overline{x^2}-\bar{x}^2$ 4) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$

6. Дополните. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=70$, полигон частот которой имеет вид

Тогда частота варианты $x_i = 2$ в выборке равно …

7. Выберете правильные ответы. Укажите абсолютные показатели вариации для вариационного ряда а) выборочное среднее

б) коэффициент вариации

в) выборочная дисперсия

г) варианта

8. Выберете правильный ответ. Выборочная дисперсия вариационного ряда равна 3,5. Объем выборки равен 50. Исправленная выборочная дисперсия равна …

а) 3.43

б) 3.57

в) 0.07

г) 3.5

9. Дополните. Дан вариационный ряд

варианта	1	2	3
частота	4	2	3

Величина xx^2 равна …

10. Дополните. Мода вариационного ряда, полученного по выборке 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4 равна …

5.2 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ЗАЧЕТА

Итоговый тест

Условия выполнения задания:
1. Место (время) выполнения задания: кабинет
2. Максимальное время выполнения задания: 60 мин.
3. Выбрать один или два варианта ответа (30 вопросов в тесте)

Проверяемые результаты обучения – З1, З2.

Вариант №1

№ пп	Задание (вопрос)	Эталон ответа
	Инструкция по выполнению заданий № 1-3: соотнесите содержание столбца 1 с содержанием столбца 2. Запишите в соответствующие строки бланка ответов букву из столбца 2, обозначающую правильный ответ на вопросы столбца 1. В результате выполнения Вы получите последовательность букв. Например: ***№ задания*** / ***Вариант ответов*** ***1.*** / ***1-Б, 2-А, 3-Г, 4-В***	
1	Для каждого предела функции из столбца 1 укажите его значение из столбца 2. Столбец 1 / Столбец 2 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}$ — А. -3 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin5x}{2}$ — Б. 0 3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x^2+2}$ — В. $\frac{5}{2}$ 4. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+4x-6)$ — Г. $\frac{27}{8}$ Д. 3	
2	Для каждой функции из столбца 1 укажите её производную из столбца 2. Столбец 1 / Столбец 2	

1. $y = \sin 3x$	А. $y' = 3\cos x$
2. $y = \mathrm{tg}(2x+3)$	Б. $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$
3. $y = 2x^{\frac{3}{2}}$	В. $y' = 3\cos 3x$
4. $y = \frac{x}{x+1}$	Г. $y' = 3x^{\frac{1}{2}}$
	Д. $y' = \frac{2}{cos^2(2x+3)}$

3 Для каждого интеграла из столбца 1 укажите его значение из столбца 2.

Столбец 1	Столбец 2
1. $\int dx =$	А. $\sin x + c$
2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$	Б. $\mathrm{t}g\, x + c$
3. $\int \cos x\, dx =$	В. $x + c$
4. $\int \mathrm{e}^x\, dx =$	Г. $e^x + c$
	Д. $\sin x + c$

Инструкция по выполнению заданий № 4-20: выберите букву, соответствующую правильному варианту ответа и запишите ее в бланк ответов.

4 Дана матрица второго порядка $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$ существует ли для нее обратная?

А. Да
Б. Нет
В. Затрудняюсь ответить

5 Найти область определения функции $y = \frac{x}{\sqrt[4]{25-x}}$

А. $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$
Б. $(-5;\ 5)$
В. $[-5; +5]$
Г. $(-\infty + \infty)$

6 Указать вид который примет интеграл $\int \frac{ln(x+1)}{x+1} dx$ после замены переменной $t = ln(x+1)$

А. $\int \frac{\ln t}{t} dt$
Б. $\int \frac{dt}{t}$
В. $\int t\, dt$
Г. $\int \ln t\, dt$

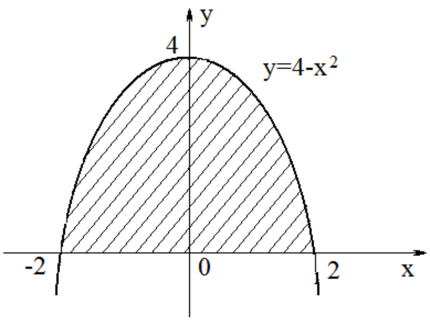
7 Решите дифференциальное уравнение $y' - 1 = 0$

А. $y = 0$
Б. $y = x + c$
В. $y = x^2 + c$
Г. нет решений

8 Вероятность p_2 распределения случайной величины x равна:

x	2	5	8
p	0,2	P_2	0,5

А. 0
Б. 0,7

	В. 0,5 Г. 0,3	
9	Площадь фигуры, изображенной на рисунке вычисляется  А. $\int_0^4 (4-x^2)\,dx$ Б. $\int_0^2 (4-x^2)\,dx$ В. $\int_{-2}^2 (4-x^2)\,dx$ Г. $\int_{-2}^0 (4-x^2)\,dx$	
10	Среди 300 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 15, не соответствующих стандарту. Найти частоту появления нестандартных деталей. А. 0,5 Б. 0,92 В. 0,05 Г. 1	
11	Решите уравнение $z^2-2z+5=0$ А. Нет решений Б. $z_{1,2}=1\pm 2i$ В. $z_1=3,\ z_2=-1$ Г. $z_1=-1\pm 2i$, z_2=2	
12	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&0&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A+B$. А. $\begin{pmatrix}1&5&2\\1&1&7\end{pmatrix}$ Б. $\begin{pmatrix}1&5&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ В. $\begin{pmatrix}5&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ Г. $\begin{pmatrix}-1&5&0\\1&1&7\end{pmatrix}$	
13	Написать простейшую формулу n-го члена числового ряда $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots$ А. $\frac{n}{n^2}$ Б. $\frac{n+2}{(n+1)^2}$ В. $\frac{n-2}{n^2}$ Г. $\frac{n+1}{(n+2)^2}$	
14	Найти вертикальные ассимптоты графика функций $y=\frac{x^3}{1-x^2}$	

	А. $x = 0$ Б. $x = 1,\ x = -1$ В. $x = 1$ Г. $x = -1,\ x = 0$	
15	Даны положительные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 1 - i$. Найти $z_1 \cdot z_2$ А. $1 - i$ Б. 2 В. -2 Г. $2 + 2i$	
16	Выберите вариант ответа. К точным методам решения систем линейных алгебраических уравнений относятся А. Метод итераций Б. Метод Крамера В. Метод Эйлера Г. Метод касательных	
17	Найдите общее решение дифференциального уравнения $xdx = 4y^3dy$ А. $y^4 = \frac{x^2}{2}$ Б. $y = \frac{x^2}{2} + c$ В. $y^4 = \frac{x^2}{2} + c$ Г. $y^3 = \frac{x}{4} + c$	
18	Определите частоту вращения шпинделя токарного станка, если скорость сверления 35 м/мин., а диаметр сверла 20 мм А. 510 об/мин Б. 557 об/мин В. 1750 об/мин Г. 577 об/мин	
19	Укажите точку разрыва для функции $y = \frac{4+x}{x-3}$ А. -4 В. 3 Б. 4 Г. $-\frac{4}{3}$	
20	Определите число делений, на которое нужно повернуть лимб винта поперечной подачи, если диаметр заготовки равен 33,2 мм, диаметр детали 31,3 мм, а цена лимба 0,05 мм. А. 38 делений Б. 19 делений В. 380 делений Г. 1,9 делений	
	Инструкция по выполнению заданий №21-30: в соответствующую строку бланка ответов запишите краткий ответ на вопрос, окончание предложения или пропущенные слова	
21	Функция $y = f(x)$ называется ….. на некотором промежутке Х из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.	
22	Если функция $z = f(x)$ дифференцируема в точке М, то она ….. в этой точке.	

23	Множество всех первообразных функции $y = f(x)$ называется….. от этой функции.	
24	Укажите метод решения интеграла $\int x^2 \ln x dx$	
25	Формула $\int_a^b f(x)dx = h\,(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + R_n$, где $R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(c),\ c \in [a;b]$, называется формулой …….	
26	Метод Эйлера заключается в построении …… кривой в виде ломаной с вершинами $M_k(x_k; y_k)$	
27	Если x_0-точка ….. графика функции $y = f(x)$, то либо вторая производная в этой точке не существует, либо равна нулю.	
28	Значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ зависит от …….	
29	Выражение вида: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется…….	
30	Укажите точки перегиба функции $y = f(x)$, если данные о её производной $f''(x)$ указаны в таблице:	

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Вариант №2

№ пп	Задание (вопрос)	Эталон ответа
Инструкция по выполнению заданий № 1-3: соотнесите содержание столбца 1 с содержанием столбца 2. Запишите в соответствующие строки бланка ответов букву из столбца 2, обозначающую правильный ответ на вопросы столбца 1. В результате выполнения Вы получите последовательность букв. Например:		

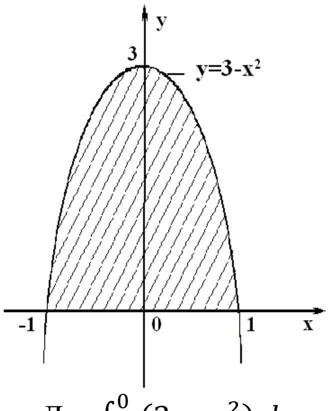
№ задания	***Вариант ответов***
1.	***1-Б, 2-А, 3-Г, 4-В***

1	Для каждого предела функции из столбца 1 укажите его значение из столбца 2.	

Столбец 1	Столбец 2
1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+6x+3}{8-x-x^2}$	Е. 2
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos7x}{3}$	Ж. 0
3. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{3x+1}{4x-1}\right)^{x^2+1}$	З. $\frac{7}{3}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3+2x-5)$	И. $\frac{16}{9}$
	К. - 2

2	Для каждой функции из столбца 1 укажите её производную из столбца 2.	

Столбец 1	Столбец 2
5. $y = \sin 2x$	Е. $y' = 2\cos x$
6. $y = \text{tg}(3x-5)$	Ж. $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$
7. $y = 2x^3$	З. $y' = 2\cos 2x$
8. $y = \frac{x}{x-1}$	И. $y' = 6x^2$
	К. $y' = \frac{3}{cos^2(3x-5)}$

<table>
<tr><td>3</td><td>Для каждого интеграла из столбца 1 укажите его значение из столбца 2.
<table>
<tr><td>Столбец 1</td><td>Столбец 2</td></tr>
<tr><td>5. $\int 3dx =$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$
7. $\int e^x\, dx =$
8. $\int \cos x\, dx =$</td><td>Е. $\sin x + c$
Ж. $-\operatorname{ctg} x + c$
З. $3x + c$
И. $e^x + c$
К. $-\sin x + c$</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Инструкция по выполнению заданий № 4-20: выберите букву, соответствующую правильному варианту ответа и запишите ее в бланк ответов.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Дана матрица второго порядка $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ существует ли для нее обратная?
Г. Да
Д. Нет
Е. Затрудняюсь ответить</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Найти область определения функции $y = \frac{x}{\sqrt[3]{3-x}}$
Д. $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
Е. $(-\infty;\ 0)$
Ж. $(0; +\infty)$
З. $(-\infty; +\infty)$</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Указать вид который примет интеграл $\int \frac{ln(x-1)}{x-1} dx$ после замены переменной $t = ln(x-1)$
Д. $\int \frac{\ln t}{t} dt$
Е. $\int \frac{dt}{t}$
Ж. $\int t\, dt$
З. $\int \ln t\, dt$</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Решите дифференциальное уравнение $y' = 2$
Д. $y = 0$
Е. $y = 2x + c$
Ж. $y = 2x^2 + c$
З. нет решений</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>Вероятность p_3 распределения случайной величины x равна:
<table>
<tr><td>x</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,5</td><td>0,3</td><td>P_3</td></tr>
</table>
Д. 0
Е. 0,3
Ж. 0,5
З. 0,2</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Площадь фигуры, изображенной на рисунке вычисляется


Д. $\int_{-1}^{0} (3 - x^2)\, dx$</td><td></td></tr>
</table>

	Е. $\int_0^1 (3 - x^2)\, dx$ Ж. $\int_{-1}^1 (3 - x^2)\, dx$ З. $\int_{-1}^0 (3 - x^2)\, dx$	
10	Среди 200 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 20, не соответствующих стандарту. Найти частоту появления стандартных деталей. Д. 0,5 Е. 0,9 Ж. 0,05 З. 1	
11	Решите уравнение $z^2 - 2z + 2 = 0$ Д. Нет решений Е. $z_{1,2} = 1 \pm i$ Ж. $z_1 = 2,\ z_2 = -1$ З. $z_{1,2} = -1 \pm 2i,$	
12	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A + B$. Д. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ Е. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Ж. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ З. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	
13	Написать простейшую формулу n-го члена числового ряда $\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{16} + \frac{4}{25} + \ldots$ Д. $\frac{n}{n^2}$ Е. $\frac{n+2}{(n+1)^2}$ Ж. $\frac{n-2}{n^2}$ З. $\frac{n}{(n+1)^2}$	
14	Найти вертикальные асимптоты графика функций $y = \frac{x-1}{x+2}$ Д. $x = 0$ Е. $x = 1$ Ж. $x = -2$ З. $x = -2,\ x = 1$	
15	Даны положительные числа $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 2 - i$. Найти $z_1 \cdot z_2$ Д. $2 - i$ Е. -4 Ж. 5 З. $4 + 2i$	
16	Выберите вариант ответа. К точным методам решения систем линейных алгебраических уравнений относятся Д. Метод итераций Е. Метод Гаусса Ж. Метод Эйлера З. Метод касательных	
17	Найдите общее решение дифференциального уравнения	

	$xdx = 3y^2dy$ Д. $y^3 = \frac{x^2}{2} + c$ Е. $y = \frac{x^2}{2} + c$ Ж. $y^2 = \frac{x^2}{2} + c$ З. $y^2 = \frac{x}{4} + c$	
18	Определите глубину резания при сверлении d=9мм. Б. 9мм Б. 45мм В. 4,5мм Г. 18мм	
19	Укажите точку разрыва для функции $y = \frac{3+x}{x-4}$ В. -4 В. 3 Г. 4 Г. -3	
20	Определите, на сколько оборотов в минуту нужно включить шпиндель станка, чтобы цилиндрическая деталь диаметром 90 мм обрабатывалась со скоростью резанья 60м/мин. Д. 224об/мин Е. 212об/мин Ж. 200об/мин З. 424об/мин	
	Инструкция по выполнению заданий №21-30: в соответствующую строку бланка ответов запишите краткий ответ на вопрос, окончание предложения или пропущенные слова	
21	Функция $y = f(x)$ называется ….. на некотором промежутке Х из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.	
22	Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется…..в этой точке.	
23	Если последовательность$\{x_n\}$ имеет конечный предел, то она называется…..	
24	Укажите метод решения интеграла $\int x \cdot sinxdx$	
25	Формула $\int_a^b f(x)dx = h\ (y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + R_n$, где $R_n = -\frac{(b-a)h}{2} f'(c),\ c \in [a; b]$, называется формулой …….	
26	Метод Эйлера заключается в построении …… кривой в виде ломаной с вершинами $M_k(x_k; y_k)$	
27	Если x_0-…..точка графика функции $y = f(x)$, то либо производная в этой точке не существует, либо равна нулю.	
28	Значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ зависит от …….	
29	Выражение вида: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + .. + (-1)^{n+1}a_n + ..$ называется…….	
30	Укажите точки перегиба функции $y = f(x)$, если данные о её производной $f''(x)$ указаны в таблице: x | $(-\infty; -1)$ | -1 | $(-1; 1)$ | 1 | $(1; +\infty)$ $f''(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$	