МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владивостокский государственный университет экономики и сервиса»

ОБНОВЛЕНО
для набора 2019
Зам. директора по УР
_______ О.А. Улитина
16 04 2020 г.

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
# УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН.01 Математика

программы подготовки специалистов среднего звена
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)
Форма обучения: Заочная

Уссурийск 2020

Рабочая программа учебной дисциплины разработана в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), утвержденного приказом Министерства образования и науки Р.Ф. от 05.02.2018 г. N 69.

Разработчик: Онохова Н.Б. преподаватель филиала ФГБОУ ВО «ВГУЭС» в г. Уссурийске

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии экономических, математических, общих естественнонаучных и правовых дисциплин
Протокол № 8 от «16» 04.2020 г.
Председатель ЦМК ____________________ Басалюк Т.Г.

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии
Протокол № 8 от «16» 04. 2020 г.
Председатель ЦМК ______________ Т.Г. Басалюк
подпись

**Содержание**

# 1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1.1. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Учебная дисциплина «Математика» является частью естественнонаучного учебного цикла основной образовательной программы (далее ООП) в соответствии с ФГОС СПО по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

## 1.2. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

По итогам освоения дисциплины, обучающиеся должны продемонстрировать результаты обучения, соотнесённые с результатами освоения ООП СПО, приведенные в таблице.

| Код<br>ПК, ОК | Умения | Знания |
|---|---|---|
| ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам | **Умения:** решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности | **Знания:** основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности |
| ОК 02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности | **Умения:** быстрота и точность поиска, оптимальность и научность необходимой информации, а также обоснованность выбора применения современных технологий её обработки | **Знания:** основных понятий и методов теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа |
| ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие. | **Умения:** организовывать самостоятельную работу при освоении профессиональных компетенций; стремиться к самообразованию и повышению профессионального уровня | **Знания:** значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ |
| ОК 04 Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами. | **Умения:** умело и эффективно работать в коллективе, соблюдать профессиональную этику | **Знания:** математических понятий и определений, способов доказательства математическими методами |
| ОК 09 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности | **Умения:** умение рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности | **Знания:** знание математического анализа информации, представленной различными способами, а также методов построения графиков различных процессов |

# 2 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

## 2.1 Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

| Вид учебной работы | Объем часов |
|---|---|
| **Объем образовательной программы учебной дисциплины** | 96 |
| в том числе: | |
| теоретическое обучение | 6 |
| практические занятия | 4 |
| самостоятельная работа | 86 |
| консультация | |
| **Промежуточная аттестация** | Дифференцированный зачёт |

## 2.2 Тематический план и содержание учебной дисциплины

| .Наименование разделов и тем | Содержание учебного материала и формы организации деятельности обучающихся | Объем в часах | Коды компетенций, формированию которых способствует элемент программы |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| **Раздел 1. Основные понятия комплексных чисел** | | **13** | |
| **Тема 1.1. Комплексные числа и действия над ними** | **Содержание учебного материала** | **13** | ОК 01, ОК 02 |
| | 1.Определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними. Геометрическое изображение комплексных чисел. | 1 | |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | не предусмотрены | |
| | Контрольные работы | не предусмотрены | |
| | Самостоятельная работа обучающихся: изучение вопросов Определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа. Решение алгебраических уравнение. | 12 | |
| **Раздел 2 Элементы линейной алгебры** | | **42** | |
| **Тема 2.1 Матрицы и определители** | **Содержание учебного материала** | **13** | ОК 02 |
| | 1. Экономико-математические методы. | 1 | |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | не предусмотрены | |
| | Контрольные работы | не предусмотрены | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Самостоятельная работа обучающихся : Матричные модели. Матрицы и действия над ними. Определитель матрицы | **12** | |
| **Тема 2.2. Методы решения систем линейных уравнений** | **Содержание учебного материала** | **13** | ОК 03, ОК 04 |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | не предусмотрены | |
| | № 1 «Решение матричных уравнений». | 1 | |
| | Контрольные работы | не предусмотрены | |
| | Самостоятельная работа обучающихся: изучение тем - Метод Гаусса, Правило Крамера, Метод обратной матрицы. | 12 | |
| **Тема 2.3. Моделирование и решение задач линейного программирования** | **Содержание учебного материала** | **16** | ОК 09 |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | | |
| | **№ 2** «Графический метод решения задачи линейного программирования». | 1 | |
| | Контрольные работы | не предусмотрены | |
| | Самостоятельная работа обучающихся : изучение тем - Математические модели. Задачи на практическое применение математических моделей. Общая задача линейного программирования. Матричная форма записи. | 15 | |
| **Раздел 3 Введение в анализ** | | **8** | |
| **Тема 3.1 Функции многих переменных** | **Содержание учебного материала** | **3** | ОК 09 |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | не предусмотрены | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Контрольные работы | не предусмотрены | |
| | Самостоятельная работа обучающихся: изучение тем - Функции двух и нескольких переменных, способы задания, символика, область определения. Бесконечно малые функции. Метод эквивалентных бесконечно малых величин. | 3 | |
| **Тема 3.2 Пределы и непрерывность** | **Содержание учебного материала** | **5** | ОК 04 |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | не предусмотрены | |
| | Контрольные работы | не предусмотрены | |
| | Самостоятельная работа обучающихся: изучение тем - Предел функции. Раскрытие неопределённости вида 0/0 и ∞/∞. Замечательные пределы. | 5 | |
| **Раздел 4 Дифференциальные исчисления** | | **11** | |
| **Тема 4.1 Производная и дифференциал** | **Содержание учебного материала** | **11** | ОК 02, ОК 03 |
| | Производные и дифференциалы высших порядков. Полный дифференциал. Частные производные высших порядков. | 1 | |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | не предусмотрены | |
| | Контрольные работы | не предусмотрены | |
| | Самостоятельная работа обучающихся: изучение тем Производная функции. Первый дифференциал функции, связь с приращением функции. Основные правила дифференцирования. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций. | 10 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Раздел 5. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения** | | **22** | |
| **Тема 5.1 Неопределённый интеграл** | **Содержание учебного материала** | **10** | ОК 03 |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | не предусмотрены | |
| | Контрольные работы | не предусмотрены | |
| | Самостоятельная работа обучающихся : изучение тем - Первообразная функция и неопределённый интеграл. Основные правила неопределённого интегрирования. Методы замены переменной и интегрирования по частям. | 10 | |
| **Тема 5.2 Определённый интеграл** | **Содержание учебного материала** | **7** | ОК 01 |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | не предусмотрены | |
| | Контрольные работы | не предусмотрены | |
| | Самостоятельная работа обучающихся изучение тем - Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определённого интеграла. Задача нахождения площади криволинейной трапеции. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной. | 7 | |
| **Тема 5.3 Несобственный интеграл** | **Содержание учебного материала** | **2** | ОК 01 |
| | 1. Интегрирование неограниченных функций. Интегрирование по бесконечному промежутку. | 1 | |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | № 3 «Вычисление несобственных интегралов. Исследование сходимости (расходимости) интегралов. Приложения интегрального исчисления». | 1 | |
| | Самостоятельная работа обучающихся | не предусмотрены | |
| **Тема 5.4 Дифференциальные уравнения** | **Содержание учебного материала** | **3** | ОК 02, ОК 04 |
| | 1. Основные понятия и определения. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. | 2 | |
| | Лабораторные занятия | не предусмотрены | |
| | Практические занятия | | |
| | № 4 «Уравнения с разделяющимися переменными. Однородное дифференциальное уравнение». | 1 | |
| | Самостоятельная работа обучающихся | не предусмотрены | |
| **Консультация** | | | |
| **Промежуточная аттестация (Дифференцированный зачёт)** | | **-** | ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 09 |
| **Всего:** | | **96** | |

## 3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

### 3.1 Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Учебная аудитория для проведения учебных занятий (урок, практическое занятие, лабораторное занятие, лекция, семинар), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации:

Кабинет Математики.

количество посадочных мест - 46 шт., стол для преподавателя 1 шт., стул для преподавателя 1 шт., мультимедийное оборудование 1 шт., доска меловая, стеллаж, дидактические пособия

ПО: Microsoft Windows 7 Professional Russian, ООО "Битроникс Владивосток" Контракт№ 0320100030814000018-45081 от 09.09.14, лицензия №64099496, бессрочно

### 3.2 Информационное обеспечение реализации программы

Для реализации программы учебной дисциплины библиотечный фонд ВГУЭС укомплектован печатными и электронными изданиями.

Обучающиеся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены печатными и (или) электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.

**Основная литература**

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. И доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/449006
2. Попов, А. М. Математика для экономистов : учебник для среднего профессионального образования / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под редакцией А. М. Попова. — 2-е изд., перераб. И доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 566 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10640-4. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/466309

**Дополнительная литература**

1. Теория вероятностей : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 203 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/teoriya-veroyatnostey-451178#page/1
2. Гисин, В. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. Б. Гисин. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 383 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11633-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/457136

**Интернет-ресурсы**:

1 www. fcior. edu. ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
www. school-collection. edu. ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).

# 4 КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Контроль и оценка результатов освоения дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения практических занятий и контрольных работ, тестирования, а также выполнения обучающимися индивидуальных заданий, проектов, исследований.

| Результаты обучения | Критерии оценки | Методы оценки |
|---|---|---|
| знание основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности | 1) знает определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними;<br>2) знает, как геометрически изобразить комплексное число;<br>3) знает, что представляет собой модуль и аргумент комплексного числа;<br>4) знает, как найти площадь криволинейной трапеции;<br>5) знает, что называется определённым интегралом;<br>6) знает формулу Ньютона-Лейбница;<br>7) знает основные свойства определённого интеграла;<br>8) знает правила замены переменной и интегрирование по частям;<br>9) знает, как интегрировать неограниченные функции;<br>10) знает, как интегрировать по бесконечному промежутку;<br>11) знает, как вычислять несобственные интегралы;<br>12) знает, как исследовать сходимость (расходимость) интегралов; | Оценка результатов устного опроса.<br>Оценка результатов выполнения домашних контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |
| знание основных понятий и методов теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа | 1) знает определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними;<br>2) знает, как геометрически изобразить комплексное число;<br>3) знает, что представляет собой модуль и аргумент комплексного числа;<br>4) знает экономико-математические методы;<br>5) знает, что представляют собой матричные модели;<br>6) знает определение матрицы и действия над ними;<br>7) знает, что представляет собой определитель матрицы;<br>8) знает, что такое определитель второго и третьего порядка; | Оценка результатов устного опроса.<br>Оценка результатов выполнения домашних контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |

| | | |
|---|---|---|
| | 9) знает задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям;<br>10) знает основные понятия и определения дифференциальных уравнений; | |
| значения математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ | 1) знает метод Гаусса, правило Крамера и метод обратной матрицы;<br>2) знает, что представляет собой первообразная функция и неопределённый интеграл;<br>3) знает основные правила неопределённого интегрирования;<br>4) знает, как находить неопределённый интеграл с помощью таблиц, а также используя его свойства;<br>5) знает в чём заключается метод замены переменной и интегрирования по частям;<br>6) знает, как интегрировать простейшие рациональные дроби; | Оценка результатов устного опроса.<br>Оценка результатов выполнения домашних контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |
| знание математических понятий и определений, способов доказательства математическими методами | 1) знает метод Гаусса, правило Крамера и метод обратной матрицы;<br>2) знает задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям;<br>3) знает основные понятия и определения дифференциальных уравнений;<br>4) знает определение предела функции;<br>5) знает определение бесконечно малых функций;<br>6) знает метод эквивалентных бесконечно малых величин;<br>7) знает, как раскрывать неопределённость вида 0/0 и ∞/∞;<br>8) знает замечательные пределы;<br>9) знает определение непрерывности функции; | Оценка результатов устного опроса.<br>Оценка результатов выполнения домашних контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |
| знание математического анализа информации, представленной различными способами, а также методов построения графиков различных процессов | 1) знает, что представляет собой математическая модель;<br>2) знает как практически применять математические модели при решении различных задач;<br>3) знает общую задачу линейного программирования;<br>4) знает матричную форму записи;<br>5) знает графический метод решения задачи линейного программирования;<br>6) знает, как интегрировать неограниченные функции;<br>7) знает, как интегрировать по бесконечному промежутку; | Оценка результатов устного опроса.<br>Оценка результатов выполнения домашних контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |

| | | |
|---|---|---|
| | 8) знает, как вычислять несобственные интегралы;<br>9) знает, как исследовать сходимость (расходимость) интегралов;<br>10) знает, как задавать функции двух и нескольких переменных, символику, область определения; | |
| Перечень умений, осваиваемых в рамках дисциплины | | |
| умение решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности | 1) умение решать алгебраические уравнения с комплексными числами;<br>2) умение решать задачи с комплексными числами;<br>3) умение геометрически интерпретировать комплексное число;<br>4) умение находить площадь криволинейной трапеции;<br>5) умение находить определённый интеграл используя основные свойства, правила замены переменной и интегрирования по частям;<br>6) умение вычислять несобственные интегралы;<br>7) умение исследовать сходимость (расходимость) интегралов; | Оценка результатов выполнения практических работ.<br>Оценка результатов выполнения домашних контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |
| быстрота и точность поиска, оптимальность и научность необходимой информации, а также обоснованность выбора применения современных технологий её обработки | 1) умение решать алгебраические уравнения с комплексными числами;<br>2) умение решать задачи с комплексными числами;<br>3) умение геометрически интерпретировать комплексное число;<br>4) умение составлять матрицы и выполнять действия над ними;<br>5) умение вычислять определитель матрицы;<br>6) умение решать задачи при помощи дифференциальных уравнений;<br>7) умение решать дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени;<br>8) умение решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;<br>9) умение решать однородные дифференциальные уравнения; | Оценка результатов выполнения практических работ.<br>Оценка результатов выполнения домашних контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |
| организовывать самостоятельную работу при освоении профессиональных компетенций; стремиться к самообразованию и | 1) умение решать системы линейных уравнений методом Гаусса, правилом Крамера и методом обратной матрицы;<br>2) умение находить неопределённый | Оценка результатов выполнения практических работ.<br>Оценка результатов выполнения домашних |

| | | |
|---|---|---|
| повышению профессионального уровня | интеграл с помощью таблиц, а также используя его свойства;<br>3) умение вычислять неопределённый интеграл методом замены переменной и интегрирования по частям;<br>4) умение интегрировать простейшие рациональные дроби; | контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |
| умело и эффективно работает в коллективе, соблюдает профессиональную этику | 1) умение решать системы линейных уравнений методом Гаусса, правилом Крамера и методом обратной матрицы;<br>2) умение решать задачи при помощи дифференциальных уравнений;<br>3) умение решать дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени;<br>4) умение решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;<br>5) умение решать однородные дифференциальные уравнения; | Оценка результатов выполнения практических работ.<br>Оценка результатов выполнения домашних контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |
| умение рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности | 1) знает, что представляет собой математическая модель;<br>2) знает, как практически применять математические модели при решении различных задач;<br>3) знает общую задачу линейного программирования;<br>4) знает матричную форму записи;<br>5) знает графический метод решения задачи линейного программирования;<br>6) умение вычислять несобственные интегралы;<br>умение исследовать сходимость (расходимость) интегралов; | Оценка результатов выполнения практических работ.<br>Оценка результатов выполнения домашних контрольных заданий.<br>Оценка результатов проведённого дифференцированного зачёта. |

Для оценки достижения запланированных результатов обучения по дисциплине разработаны контрольно-оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, которые прилагаются к рабочей программе дисциплины.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА
Филиал ФГБОУ ВО «ВГУЭС» в г. Уссурийске

**КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА**
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
по учебной дисциплине
ЕН.01 Математика
программы подготовки специалистов среднего звена

38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Форма обучения: *заочная*

Уссурийск, 2020

Контрольно-оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по учебной дисциплине разработаны в соответствии с требованиями ФГОС СПО по специальности *38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)*, утвержденного приказом Минобрнауки РФ от 5 февраля 2018 г. N 69, примерной образовательной программой, рабочей программой учебной дисциплины.

Разработчик(и): *Н.Б. Онохова, преподаватель*

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии

Протокол № 8 от «16» 04 2020 г.

Председатель ЦМК ________ *Т.Г. Басалюк*

*подпись*

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой методической комиссии

Протокол № 8 от «16» 04 2020 г.

Председатель ЦМК ________ *И.О. Фамилия*

*подпись*

**1 Общие сведения**

Контрольно-оценочные средства (далее – КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины *ЕН.01 Математика.*

КОС включают в себя контрольные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине, которая проводится в форме дифференцированного зачёта (с использованием оценочного средства - *устный опрос в форме ответов на вопросы билетов, выполнение письменных заданий)*

**2 Планируемые результаты обучения по дисциплине, обеспечивающие результаты освоения образовательной программы**

<table>
<tr><th>Код ОК</th><th>Код результата обучения</th><th>Наименование результата обучения</th></tr>
<tr><td rowspan="6">ОК 01<br>ОК 02<br>ОК 03<br>ОК 04<br>ОК 09</td><td>З1</td><td>Знания: основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности</td></tr>
<tr><td>З2</td><td>Знания: основных понятий и методов теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа</td></tr>
<tr><td>З3</td><td>Знания: значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ</td></tr>
<tr><td>З4</td><td>Знания: математических понятий и определений, способов доказательства математическими методами</td></tr>
<tr><td>З5</td><td>Знания: знание математического анализа информации, представленной различными способами, а также методов построения графиков различных процессов</td></tr>
<tr><td>У1</td><td>Умения: решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности</td></tr>
<tr><td rowspan="5">ОК 01<br>ОК 02<br>ОК 03<br>ОК 04<br>ОК 09</td><td>У2</td><td>Умения: быстрота и точность поиска, оптимальность и научность необходимой информации, а также обоснованность выбора применения современных технологий её обработки</td></tr>
<tr><td>У3</td><td>Умения: организовывать самостоятельную работу при освоении профессиональных компетенций; стремиться к самообразованию и повышению профессионального уровня</td></tr>
<tr><td>У4</td><td>Умения: умело и эффективно работать в коллективе, соблюдать профессиональную этику</td></tr>
<tr><td>У5</td><td>Умения: умение рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности</td></tr>
</table>

**3 Соответствие оценочных средств контролируемым результатам обучения**

**3.1 Средства, применяемые для оценки уровня теоретической подготовки**

| Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины | Код результата обучения | Показатель овладения результатами обучения | Наименование оценочного средства и представление его в КОС | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Текущий контроль | Промежуточная аттестация |
| **Раздел 1. Основные понятия комплексных чисел** | | | | |
| **Тема 1.1. Комплексные числа и действия над ними** | 32 | Знать определение комплексного числа, противоположного, сопряженного комплексного числа, мнимая единица | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 32 | Знать понятие модуля и аргумента комплексного числа; | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 34 | Знать понятие тригонометрическая форма комплексного числа, действия над комплексными числами в тригонометрической форме | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| **Раздел 2. Элементы линейной алгебры** | | | | |
| **Тема 2.1. Матрицы и определители** | 34 | Понятия определителей системы; матрицы, свойства матриц, действия над матрицами | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| **Тема 2.2. Методы решения систем линейных уравнений** | 33 | Перечисление последовательности действий при решении систем линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера, методом Гаусса | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| **Тема 2.3. Моделирование и решение задач линейного программирования** | 31 | Математические свойства моделей и методы решения задач линейного программирования | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| **Раздел 3. Введение в анализ** | | | | |
| **Тема 3.1. Функции многих переменных** | 35 | Способы задания функции многих переменных | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 35 | Область определения | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 34 | Экстремум функции нескольких переменных | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| **Тема 3.2. Пределы и непрерывность** | 35 | Вычисление предела числовой последовательности | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 35 | Вычисление предела монотонной ограниченной | Устный фронтальный | Вопросы на диф. зачёт |

| Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины | Код результата обучения | Показатель овладения результатами обучения | Наименование оценочного средства и представление его в КОС | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Текущий контроль | Промежуточная аттестация |
| | | последовательности | контроль. | |
| | 34 | Основные теоремы о пределах | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| **Раздел 4. Дифференциальные исчисления** | | | | |
| **Тема 4.1. Производная и дифференциал** | 35 | Задачи, приводящие к понятию производной. Производная суммы, разности, произведения, частного функций. Нахождение производных элементарных функций. Формулировка геометрического и механического смысла производной. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 35 | Формулировка правил дифференцирования и перечисление производных основных элементарных функций. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 34 | Производная сложной и обратной функций | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 35 | Правила дифференцирования. Дифференцирование сложных функции. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 35 | Классификация точек разрыва. Исследование функций на экстремум. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 34 | Исследование функций на выпуклость и вогнутость, перегиб функции. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 35 | Определение производной и ее физический и геометрический смысл | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| **Раздел 5. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения** | | | | |
| **Тема 5.1. Неопределённый интеграл** | 35 | Понятие первообразной функции. Неопределённый интеграл, его свойства. Формулы интегрирования. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 34 | Методы нахождения неопределённого интеграла. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| **Тема 5.2. Определённый интеграл** | 35 | Определённый интеграл, его свойства, таблица простейших интегралов. Формула Ньютона – Лейбница. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 35 | Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | 34 | Вычисление объёмов тел вращения с помощью | Устный фронтальный | Вопросы на диф. зачёт |

| Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины | Код результата обучения | Показатель овладения результатами обучения | Наименование оценочного средства и представление его в КОС | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Текущий контроль | Промежуточная аттестация |
| | | определённого интеграла, давления. | контроль. | |
| **Тема 5.3. Несобственный интеграл** | З5 | Правила вычисления несобственных интегралов. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | З5 | Понятия сходящихся и расходящихся несобственных интегралов. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| **Тема 5.4. Дифференциальные уравнения** | З4 | - Алгоритм решения линейных дифференциальных уравнения первого порядка. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |
| | З5 | Решение задач на составление дифференциальных уравнений. | Устный фронтальный контроль. | Вопросы на диф. зачёт |

**3.2 Средства, применяемые для оценки уровня практической подготовки**

| Краткое наименование раздела (модуля) / темы дисциплины | Код результата обучения | Показатель овладения результатами обучения | Наименование оценочного средства и представление его в КОС | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Текущий контроль | Промежуточная аттестация |
| **Раздел 2. Элементы линейной алгебры** | | | | |
| Тема 2.2 Практическая работа № 1 | У1-5 | Решать системы линейных уравнений методом обратной матрицы | *Отчет по практической работа №1* | *Практическая часть к диф. зачёту* |
| Тема 2.3 Практическая работа № 2 | У1-5 | Решать задачи методами линейного программирования | *Отчет по практической работа №2* | *Практическая часть к диф. зачёту* |
| **Раздел 5. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения** | | | | |
| Тема 5.3 Практическая работа № 3 | У1-5 | *Вычислять несобственные интегралы* | *Отчет по практической работа №3* | *Практическая часть к диф. зачёту* |
| Тема 5.4 Практическая работа № 4 | У1-5 | *Решать задачи на составление дифференциальных уравнений.* | *Отчет по практической работа №4* | *Практическая часть к диф. зачёту* |

**4 Описание процедуры оценивания**

Результаты обучения по дисциплине, уровень сформированности компетенций оцениваются по четырёх бальной шкале оценками: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» (*по бальной системе. Максимальная сумма баллов по дисциплине равна ___ баллам.)*.

Текущая аттестация по дисциплине проводится с целью систематической проверки достижений обучающихся. Объектами оценивания являются: степень усвоения теоретических знаний, уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы, качество выполнения самостоятельной работы, учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине).

При проведении промежуточной аттестации оценивается достижение студентом запланированных по дисциплине результатов обучения, обеспечивающих результаты освоения образовательной программы в целом. *Оценка на зачете / экзамене выставляется с учетом оценок, полученных при прохождении текущей аттестации.*

**Критерии оценивания устного ответа**

**5 баллов** - ответ показывает прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа; умение приводить примеры современных проблем изучаемой области.

**4 балла** - ответ, обнаруживающий прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается одна - две неточности в ответе.

**3 балла** – ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой предметной области, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы; знанием основных вопросов теории; слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры; недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа; неумение привести пример развития ситуации, провести связь с другими аспектами изучаемой области.

**2 балла** – ответ, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы; незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа явлений, процессов; неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Допускаются серьезные ошибки в содержании ответа; незнание современной проблематики изучаемой области.

**Критерии оценивания письменной работы**

(оценочные средства: *реферат, эссе, конспект, контрольная работа, расчетно-графическая работа, письменный отчет по лабораторной работе, портфолио, доклад (сообщение), в том числе выполненный в форме презентации, творческое задание, курсовая работа.*).

**5 баллов** - студент выразил своё мнение по сформулированной проблеме, аргументировал его, точно определив ее содержание и составляющие. Проблема раскрыта полностью, выводы обоснованы. Приведены данные отечественной и зарубежной литературы, статистические сведения, информация нормативно-правового характера. Студент владеет навыком самостоятельной работы по заданной теме; методами и приемами анализа теоретических и/или практических аспектов изучаемой области. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет; графически работа оформлена правильно.

**4 балла** - работа характеризуется смысловой цельностью, связностью и последовательностью изложения; допущено не более 1 ошибки при объяснении смысла или содержания проблемы. Проблема раскрыта. Не все выводы сделаны и/или обоснованы. Для аргументации приводятся данные отечественных и зарубежных авторов. Продемонстрированы исследовательские умения и навыки. Фактических ошибок, связанных с пониманием проблемы, нет. Допущены одна-две ошибки в оформлении работы.

**3 балла** – студент проводит достаточно самостоятельный анализ основных этапов и смысловых составляющих проблемы; понимает базовые основы и теоретическое обоснование выбранной темы. Проблема раскрыта не полностью. Выводы не сделаны и/или выводы не обоснованы Проведен анализ проблемы без привлечения дополнительной литературы. Допущено не более 2 ошибок в смысле или содержании проблемы, оформлении работы.

**2 балла** - работа представляет собой пересказанный или полностью переписанный исходный текст без каких бы то ни было комментариев, анализа. Не раскрыта структура и теоретическая составляющая темы. Проблема не раскрыта. Выводы отсутствуют. Допущено три или более трех ошибок в смысловом содержании раскрываемой проблемы, в оформлении работы.

**Критерии оценивания тестового задания**

| Оценка | *Отлично* | *Хорошо* | *Удовлетворительно* | *Неудовлетворительно* |
|---|---|---|---|---|
| Количество правильных ответов | 91 % и ≥ | от 81% до 90,9 % | не менее 70% | менее 70% |

**Критерии выставления оценки студенту на зачете/ экзамене**

(оценочные средства: *устный опрос в форме ответов на вопросы билетов, устный опрос в форме собеседования, выполнение письменных разноуровневых задач и заданий, комплексная расчетно-графическая работа, творческое задание, кейс-задача, портфолио, проект и т.п.)*

| Оценка по промежуточной аттестации | Характеристика качества сформированности компетенций |
|---|---|
| «зачтено» / «отлично» | Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на продвинутом уровне: обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач. |
| «зачтено» / «хорошо» | Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на базовом уровне: основные знания, умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации. |
| «зачтено» / «удовлетворительно» | Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на пороговом уровне: имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, в ходе контрольных мероприятий допускаются значительные ошибки, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ, при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации. |
| «не зачтено» / «неудовлетворительно» | Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на уровне ниже порогового: выявляется полное или практически полное отсутствие знаний значительной части программного материала, студент допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, умения и навыки не сформированы. |

## 5. Примеры оценочных средств для проведения текущей аттестации

***Тема 1.1. «Комплексные числа и действия над ними».***

**Устный фронтальный контроль**

1) Пользуясь конспектом лекции и рекомендуемой литературой ответить на вопросы:

- Что такое мнимая единица? Как вычисляют степени мнимой единицы? (пример).
- Какое число называется комплексным?
- Какие комплексные числа называются чисто мнимыми, равными, сопряженными?
- Как геометрически изображаются комплексные числа?
- Как записывается комплексное число в алгебраической форме?
- Как выполняются сложение , вычитание ,умножение комплексных чисел в алгебраической форме? (пример).
- Как выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме?(пример)
- Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулы для модуля и аргумента комплексного числа.
- Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
- Как записывается комплексное число в показательной форме?
- Как выполнить переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической? к показательной?
- Как выполнить переход от тригонометрической формы комплексного числа к алгебраической? От показательной ? Выполнить конспект вопроса «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме».

2) Выполнить конспект вопроса «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме».

**Тема 2.1 Матрицы и определители**

**Устный фронтальный контроль**

1) Пользуясь конспектом лекции и рекомендуемой литературой ответить на вопросы:

- Что называют определителем квадратной матрицы? определителем второго порядка? определителем третьего порядка? Какими свойствами обладает определитель?
- В чем состоит метод треугольников для вычисления определителя третьего порядка? (пример)
- Что называют минором? алгебраическим дополнением элемента определителя? (пример)
- В чем состоит метод разложения по элементам строки (столбца) для вычисления определителя третьего порядка? высшего порядка? (пример)
- В чем состоит метод Гаусса для вычисления определителей высшего порядка?

2) Составить конспект вопроса «Обратная матрица. Порядок вычисления обратной матрицы».

***Тема 2.2. «Методы решения систем линейных уравнений».***

**Устный фронтальный контроль**

Пользуясь конспектом лекции и рекомендуемой литературой ответить на вопросы:

- Что называют элементарной системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)?
- Что называют решением элементарной СЛАУ?
- Что называют основной матрицей, расширенной матрицей, столбцом свободных членов, столбцом неизвестных, элементарной СЛАУ?
- Каковы основные методы решения СЛАУ?
- В чем суть метода Крамера для решения СЛАУ? (пример)
- В чем суть метода Гаусса для решения СЛАУ? (пример)
- В чем суть матричного метода решения СЛАУ?

## Практическая работа № 1
## «Решение матричных уравнений»

**Цель работы:** научиться решать системы линейных уравнений методом обратной матрицы.

**Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:**

Студент должен

уметь:

- решать системы линейных уравнений.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

### Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

### Система линейных уравнений. Основные понятия

***Системой линейных алгебраических уравнений***, содержащей ***m*** уравнений и ***n*** неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .......... .......... .......... .......... ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где числа $a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, называются ***коэффициентами системы***, числа $b_j$ - ***свободными членами.*** Подлежат нахождению числа $x_i$, *где* $i = \overline{0,n}$ . Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме:***

$$A \cdot X = B, \qquad (2)$$

здесь $A$ – матрица коэффициентов системы, называемая ***основной матрицей***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .......... ......... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор - столбец из неизвестных $x_j$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{– вектор - столбец из свободных членов } b_j \qquad (3)$$

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$, дополненная столбцом членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{2n}b_2 \\ .......... ......... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn}b_m \end{pmatrix} \qquad (4)$$

***Решением системы*** называется $n$ значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется ***определенной,*** если она имеет единственное решение, и ***неопределенной,*** если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется ***частным решением системы.*** Совокупность всех частных решений называется ***общим решением. Решить систему*** – это значит выяснить, совместна она или не совместна и если система совместна, значит найти ее общее значение.

Две системы называются ***эквивалентными*** (равносильными), если они имеют одно и то же решение. Эквивалентные системы чаще всего получаются, в частности, при ***элементарных преобразованиях системы*** при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

**Решение систем методом обратных матриц**

Пусть дана система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .......... .......... .......... .......... ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (5)$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$. Основная матрица $A$ такойсистемы квадратная. Определитель этой матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}........a_{1n} \\ .......... ...... \\ a_{n1}........a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется ***главным определителем системы.*** Если определитель системы отличен от нуля, то система называется ***невырожденной.*** Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу $A^{-1}$, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$

Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (6)$$

Отыскание решения системы по формуле (1) называют ***методом обратных матриц*** решения системы.

**Пример по выполнению практической работы**

**Пример 1**. Решить систему уравнений методом обратных матриц:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 11. \end{cases}$$

Решение: $\Delta = \begin{pmatrix} 1-2 & 3 \\ 2 \;\; 1 & -2 \\ 3 \;\; 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4+4) + 2(-8+6) + 3(4-3) = -1$

Составим союзную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8+6) = 2$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4-9 = -13$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2+6) = -8$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5$

Союзная матрица будет следующей: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы по формуле (6):

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, решением системы будет тройка чисел (1; 2; -1)

**Задания для практического занятия:**

**Вариант 1**

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \\ 3x_2 + \ \ x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 13; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$

**Вариант 2**

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \qquad\quad = 11; \\ \qquad 5x_2 + 6x_3 = 28; \\ x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_2 - 5x_3 = -9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

**Вариант 3**

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14; \\ 3x - \ \ y + 2z = 5; \\ x + 2y - z = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 10; \\ -2x_2 - x_3 = -4; \\ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

**Вариант 4**

1. Методом обратных матриц найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10; \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12; \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

## Контрольные вопросы

1. Укажите общий вид системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными;
2. Что значит решить систему уравнений? Дать определение общего и частного решений;
3. Опишите метод обратных матриц решения систем линейных уравнений.

## *Тема 2.3 «Моделирование и решение задач линейного программирования».*

## Оценочное задание

**Практическая работа № 2** «Графический метод решения задачи линейного программирования».

Составить оптимальный план достижения максимальной прибыли от реализации изделий видов А и В. Данные производства приведены в таблице:

| № | | Запрос сырья, | Норма сырья на 1 единицу, кг |
|---|---|---|---|

| п/п | Вид сырья | кг | Изделие А | Изделие В |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $S_1$ | 12 | 6 | 9 |
| 2 | $S_2$ | 8 | 3 | 2 |
| 3 | $S_3$ | 10 | 1 | 5 |
| Прибыль от реализации одного изделия, д.е. | | | 18 | 24 |

**Решить задачу:**

1. Лодка находится на озере на расстоянии 3 км от ближайшей точки А берега. Пассажир лодки желает достигнуть села В, находящегося на берегу на расстоянии 5 км от А (участок АВ берега считается прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села в кратчайшее время?

***Оценочное индивидуальное задание***

**Практическая работа № 7 «Графический метод решения задачи линейного программирования».**

**Цель:** отработать навыки по решению задач линейного программирования графическим методом.

**Примеры выполнения заданий**

**Задача 3.**

Решить геометрически задачу линейного программирования:

при ограничениях:

Решение.

Изобразим многоугольник решений на рис. 2. Очевидно, что при линия

уровня проходит через начало координат (строить ее не обязательно). Зададим,

например, и построим линию уровня . Ее расположение указывает на направление

возрастания линейной функции (вектор ). Так как рассматриваемая задача — на отыскание

максимума, то оптимальное решение − в угловой точке , находящейся на пересечении

прямых I и II, т.е. координаты точки

определяются решением системы уравнений

откуда , т.е. .

Рис. 2.

Максимум (максимальное значение) линейной функции равен .

Итак, при оптимальном решении , т.е. максимальная прибыль в 24 руб. может быть

достигнута при производстве 6 единиц продукции и 4 единиц продукции .

*Замечание.* Многоугольник допустимых планов может быть в частности треугольником, четырехугольником и т. д. Может оказаться, что полуплоскости не имеют общих точек. Это означает, что система ограничений противоречива и ЗЛП решений не имеет, т.к. нет допустимых планов.

**Задание к практическому занятию:**

**Базовый уровень:**

В заданиях **1− 3** составить экономико-математические модели.

**Задание 1.** Для производства двух видов изделий и предприятие использует три вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице.

| Вид сырья | Нормы расхода сырья на одно изделие, кг | Общее количество сырья, кг |
|---|---|---|
| I | | |
| II | | |
| III | | |
| Прибыль от реализации одного изделия, ден.ед. | | |

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации

продукции будет максимальной при условии, что изделий надо выпустить не менее, чем

изделий .

**Задание 2.**Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 70 ден.ед. и содержит: 0,5 ед. жиров, 4 ед. белков, 1 ед. углеводов, 1 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 16 ден.ед. и содержит 3 ед. жиров, 6 ед. белков, 4 ед. углеводов, 3 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 9 ед., белков не менее 5 ед., углеводов не менее 4 ед., нитратов не более 11 ед.

**Задание 3.**На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

| Тип аппарата | Производительность работы линий, шт. в сутки | Затраты на работу линий, ден.ед. в сутки | План, шт. |
|---|---|---|---|

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

**Повышенный уровень:**

**Задание 4.**

Найти опорное решение задачи линейного программирования вида и соответствующее допустимое значение целевой функции :

Ответ: 4

**Задание 5.**

Найти опорное решение задачи линейного программирования вида

и соответствующие допустимые значения целевой функции :

Ответ: 2

**Задание 6.**

Найти опорное решение задачи линейного программирования вида и соответствующее допустимое значение целевой функции :

Ответ: 3

**Задание 7.**

Решить графическим методом задачи с двумя переменными (табл. 1)

Таблица 1. Варианты задания 7

| Вариант | Задача | Вариант | Задача |
|---|---|---|---|
| | $Z(X)=2x_1+4x_2$®max, $x_1$³0, $x_2$³0 | | $Z(X)=-3x_1-x_2$®min, $x_1$³0, $x_2$³0 |
| | $Z(X)=15x_1+10x_2$®max, $x_1$³0, $x_2$³0 | | $Z(X)=2x_1+3x_2$®max, $x_1$³0 |

$Z(X)=3x_1+2x_2$®max, $x_1$³0, $x_2$³0 $Z(X)=4x_1+6x_2$®max,

Продолжение таблицы 1. Варианты задания 7

$Z(X)=2x_1+5x_2$®min, $x_1$³0, $x_2$³0 $Z(X)=-x_1+4x_2$®min, $x_2$³0

$Z(X)=2x_1-x_2$®max, $x_1$³0, $x_2$³0 $Z(X)=x_1+4x_2$®min, $x_1$³0, $x_2$³0

**Задание 8.** Решить графическим методом задачи с переменными (табл. 2).

Таблица 2. Варианты задания 8

| Вариант | Задача | Вариант | Задача |
|---|---|---|---|
| | $Z(X)=2x_1+8x_2+3x_3+4x_4$® min, $x_j$³0, j=1,2,3,4 | | $Z(X)=2x_1+6x_2+x_3+x_4$®max, $x_j$³0, j=1,2,3,4 |
| | $Z(X)=2x_1+3x_2-x_3+4x_4$®min, $x_j$³0, j=1,2,3,4 | | $Z(X)=2x_1+5x_2+x_3+x_4$®max, $x_j$³0, j=1,2,3,4 |
| | $Z(X)=4x_1+13x_2+3x_3+6x_4$®min, $x_j$³0, j=1,2,3,4 | | $Z(X)=9x_1+2x_2+4x_3-8x_4$®max, $x_j$³0, j=1,2,3,4 |
| | $Z(X)=x_1+x_2+3x_3+4x_4$®min, $x_j$³0, j=1,2,3,4 | | $Z(X)=x_1-2x_2-x_3+3x_4$®max, $x_j$³0, j=1,2,3,4 |
| | $Z(X)=11x_2+x_3+4x_4$®min, $x_j$³0, j=1,2,3,4 | | $Z(X)=2x_1+x_2-x_3-2x_4$®min, $x_j$³0, j=1,2,3,4 |

**Вопросы для самостоятельной работы**

**Базовый уровень:**

1. Что называется экономико-математической моделью?
2. Перечислить основные этапы экономико-математического моделирования.
3. Что называется целевой функцией?

4. Сформулируйте общую постановку задачи линейного программирования.

**Повышенный уровень:**

5. В чем суть принципа оптимальности в планировании и управлении?
6. В чем заключается геометрическая интерпретация задачи линейного программирования?
7. Каковы основные этапы метода графического решения задачи линейного программирования?
8. Каким может быть множество допустимых решений задачи линейного программирования?

9. Какое направление для целевой функции указывает ее градиент?

10. Когда применяется графический метод ЗЛП?

***Тема 3.2 «Пределы и непрерывность».***

**Устный фронтальный контроль**

Пользуясь конспектом лекции и рекомендуемой литературой ответить на вопросы:

1. Что называют пределом бесконечной числовой последовательности
2. Что понимают под пределом функции на бесконечности?
3. Что понимают под пределом функции в точке?
4. Какая функция называется непрерывной в точке на промежутке X?
5. Какие арифметические операции можно выполнять над пределами?
6. Как вычислить предел во внутренней точке области определения любой элементарной функции?
7. Какая функция называется бесконечно малой (бесконечно большой) в точке на бесконечности?
8. Какова взаимосвязь между бесконечно малыми и бесконечно большими?
9. Каковы основные приемы раскрытия неопределенностей , , – — , ?
10. Что понимают под левосторонним (правосторонним) пределом функции в точке
11. Какую точку называют точкой разрыва 1 рода?
12. Какую точку точкой разрыва 2 рода?
13. Какую точку точкой устранимого разрыва?
14. В чем суть исследования функции на непрерывность?
15. Что такое асимптота графика функции? какие существуют виды асимптот? Как найти вертикальные асимптоты? наклонные асимптоты?

**Практическая работа 4 «Уравнения с разделяющимися переменными. Однородное дифференциальное уравнение».**

**Цель работы:** научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка.

**Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:**

Студент должен

уметь:

- решать дифференциальные уравнения.

знать:

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы**

***Дифференциальные уравнения второго порядка*** в общем случае записывается в виде:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (1)$$

или, если это возможно, в разрешённом относительно $y''$ виде

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

Говорят, что формула $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ представляет ***общее решение*** дифференциального уравнения второго порядка (1) или (2), если для любых значений $C_1'$ и $C_2'$ постоянных $C_1$ и $C_2$ функция $\varphi(x, C_1', C_2')$ является решением данного уравнения, и любое его ***частное решение*** может быть получено из формулы $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при некоторых значениях $C_1'$ и $C_2'$.

Для дифференциальных уравнений второго порядка ***задача Коши*** формулируется следующим образом: найти решение *y = y(x)* уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ или, в другой записи,

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'. \end{cases} \qquad (3)$$

где $x_0, y_0, y_0'$ - заданные числа. Геометрически общее решение уравнения (1) или (2) представляет собой семейство интегральных кривых, а решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0 ; y_0)$ в данном направлении – угловой коэффициент касательной к интегральной кривой (графику решения *y = y(x)*), проведённой в точке $(x_0 ; y_0)$ равен данному числу $y_0'$. Простейшее уравнение второго порядка имеет вид:

$$y'' = f(x). \qquad (4)$$

Уравнения этого вида называются уравнениями, допускающими понижение порядка и решаются двукратным интегрированием: полагаем $y' = p(x)$ ,тогда $y'' = p'$ и уравнение (4) принимает вид $p' = f(x)$, или *dp=f(x) dx.* Отсюда $p = \int f(x)dx = F(x) + C_1$, где *F(x)* – одна из первообразных для функции f(x). Так как $p = y'$,то $y' = F(x) + C_1$ или $dy = (F(x) + C_1)dx$. Отсюда, интегрируя ещё раз, находим, как нетрудно проверить, общее решение уравнения (4) (в области, где существуют рассматриваемые интегралы):

$$y = \int F(x)dx + C_1 x + C_2.$$

Уравнение вида $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, (5)

где $a_0, a_1, a_2$ - действительные числа $(a_0 \neq 0)$, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.Чтобы решить уравнение (5), нужно решить характеристическое уравнение:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (6)$$

При решении характеристического уравнения (6) возможны три случая, в зависимости от которых строится общее решение данного дифференциального уравнения (5)

| Корни уравнения (6) | Частные решения уравнения (5) | Общее решение уравнения (5) |
|---|---|---|
| Действительные и различные: $k_1 \neq k_2$ | $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$ | $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ |
| Равные: $k_1 = k_2$ | $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = x e^{k_1 x}$ | $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$ |
| Комплексно сопряжённые: $\alpha \pm \beta i$ | $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$; $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ | $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ |

**Пример по выполнению практической работы**

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения $y'' = \cos 2x$.

Решение: положим $y' = p(x)$; тогда $y'' = p'$, и, следовательно, $p' = \cos 2x$ или $dp = \cos 2x$.

Интегрируя это уравнение, находим: $p = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$, или

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1, \text{ т..е. } \quad dy = \frac{1}{2}\sin 2x dx + C_1 dx.$$

Интегрируя второй раз, находим общее решение: $\int dy = \int \frac{1}{2}\sin 2x dx + C_1 \int dx$, т.е.

$$y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2.$$

**Пример 2.** Дана задача Коши: $\begin{cases} y'' = \dfrac{3}{\sqrt{x}}; \\ y = 4, \ y' = 14 \ \ при \ x = 4. \end{cases}$

Решение: Положим $p = y'$, тогда $y'' = p'$ и получим следующее уравнение:

$p' = 3x^{-\frac{1}{2}}$ или $dp = 3x^{-\frac{1}{2}}dx$. Интегрируя, получим: $p = y' = 6x^{\frac{1}{2}} + C_1$.

Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то получим следующее: $\dfrac{dy}{dx} = 6x^{\frac{1}{2}} + C_1$ или $dy = (6x^{\frac{1}{2}} + C_1)dx$.

Интегрируя почленно, получим $y = 4\sqrt{x^3} + C_1 x + C_2$ - общее решение. Наложим начальные условия.

Тогда $y(4) = 4 \cdot 4^{\frac{3}{2}} + C_1 \cdot 4 + C_2 = 4 \quad y'(4) = 6 \cdot 4^{\frac{1}{2}} + C_1 = 14$

Отсюда имеем, что $C_1 = 2, \quad C_2 = -36$. Значит, частное решение следующее:

$$y = 4\sqrt{x^3} + 2x - 36.$$

**Пример 3.** Найти общее решение уравнений: а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

Решение:

а) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - \kappa - 2 = 0$.

Его корни $\kappa_1 = 2$ и $\kappa_2 = -1$. Значит, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

б) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0$.

Его корни $\kappa_1 = \kappa_2 = -3$. Тогда общее решение имеет вид $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

**Пример 4.** Найти решение задачи Коши: $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 6, \ y'(0) = 15$

Решение: составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - 4\kappa + 5 = 0$. Решая его, получим $D = -4$ и комплексно сопряжённые корни $k_1 = 2 - i$ и $k_2 = 2 + i$. Тогда его общим решением будет $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Подставим начальное условие: $y(0) = e^{2\cdot 0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = C_1 = 6$. Вычислим производную $y' = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$. Подставим начальное условие $y'(0) = 2e^{2\cdot 0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^{2\cdot 0}(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = 2C_1 + C_2 = 2 \cdot 6 + C_2 = 15$. Откуда имеем $C_2 = 3, \Rightarrow y = e^{2x}(6\cos x + 3\sin x)$ - частное решение.

**Задания для практического занятия:**

***Вариант 1***

1.Найти общее решение дифференциального уравнения *:* $y'' = \dfrac{1}{x^2}$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = \sin x; \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2. \end{cases}$

3. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a(t) = 12t - 1$ (ускорение - *м/с*$^2$, время - *сек*). Начальное положение тела $x(0) = 0$ и начальная скорость $v(0) = 10 м/с$ . Найти закон движения тела и путь, пройденный за 3 секунды;

4. Найти общее дифференциального уравнения: $y'' - 2y' + 5y = 0$.

5 .Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 10y' + 16y = 0; \\ y = 4; y' = 26, \quad при \quad x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 8y' + 20y = 0; \\ y = 2; y' = 8, \quad при \quad x = 0. \end{cases}$

***Вариант 2***

1.Найти общее решение дифференциального уравнения : $y'' = x^2 + 1$

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = -3cosx; \\ y(\pi) = 5\pi, y'(\pi) = 5. \end{cases}$

3. Из семейства интегральных кривых уравнения $y'' = 12x^2$ выделить ту, которая в точке (1; 1) имеет касательную с угловым коэффициентом, равным 4;

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 10y' + 9y = 0$.

5.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = 0; \\ y = 3, y' = -9, при\ x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 6y' + 25y = 0; \\ y = 2; y' = 10, \quad при \quad x = 0. \end{cases}$

***Вариант 3***

1.Найти общее решение дифференциального уравнения : $y'' = \sin x + 1$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \\ y(1) = \dfrac{2}{3};\, y'(1) = 2. \end{cases}$

3. Из семейства интегральных кривых уравнения $y'' = 6(1-x)$ выделить ту, которая в точке (1; 5) имеет касательную с углом наклона к оси OX, равным $\dfrac{\pi}{4}$.

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 7y' + 12y = 0$.

5.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 4y' - 32y = 0; \\ y = 8,\ y' = -4,\ \text{при}\ x = 0. \end{cases}$

6.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 8y' + 25y = 0; \\ y = 5;\, y' = 4, \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$

**Вариант 4**

1.Найти общее решение дифференциального уравнения : $y'' = 60x^2 - 4x + 2$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = x^3 + 3; \\ y(1) = -2{,}45;\ y'(1) = 2{,}25. \end{cases}$

3. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a(t) = 6t - 4$ (ускорение - *м/с²*, время - *сек*). Найти закон движения тела и путь, пройденный за 5 секунд; если через 2 секунды после начала движения $v = 6м/с,\ s = 5м$ ;

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 9y = 0.$

5.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 3y' - 10y = 0; \\ y = 2,\ y' = -3,\ \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 4y' + 20y = 0; \\ y = 3;\, y' = 2, \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$

**Контрольные вопросы**

1. Назовите общий вид дифференциальных уравнений второго порядка.
2. Как решается дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение степени?
3. Что такое обшее и частное решения дифференциального уравнения второго порядка?
4. Сформулируйте задачу Коши второго порядка.
5. Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка?
6. Как составить характеристическое уравнение? Какие варианты решений дифференциального уравнения возможны?

# М Е Т О Д И Ч Е С К И Е
# У К А З А Н И Я

к контрольной работе
**по дисциплине «МАТЕМАТИКА»**

для студентов I курса заочного обучения

Методические указания созданы в помощь студентам Iкурса заочного отделения . В данном пособии указаны основные требования, предъявляемые к оформлению и выполнению домашней контрольной работы. Даны задания по вариантам для студентов, представлены примеры решения типовых задач, указана рекомендуемая литература и вопросы для самостоятельного изучения.

# СОДЕРЖАНИЕ



## ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

**Контрольная работа должна содержать:**

1. Титульный лист
2. Рецензия
3. Оглавление
4. Содержание работы
5. Список используемой литературы

**Работа выполняется вручную.**

Контрольная работа может быть выполнена по усмотрению студента:
- либо в обычной ученической тетради,
- либо на листах формата А4.

**Титульный лист.**
На титульном листе указывается название учебного заведения; дисциплина; номер группы; номер варианта; Ф. И. О студента, выполнившего контрольную работу; Ф. И. О. преподавателя, проверяющего контрольную работу; год выполнения контрольной работы.

**Рецензия.** Содержит один чистый лист для рецензии работы.

**Оглавление.** Содержит перечень заданий с указанием номеров страниц.

**Содержание работы.**
Каждый вариант контрольной работы содержит 9 заданий. Задания выполняются в указанном порядке. Условия заданий должны быть записаны полностью. Каждое задание начинается с новой страницы. В решении задач необходимо указать все используемые формулы; решение должно содержать комментарии или пояснения, указаны все расчеты и показаны все преобразования выполняемые с алгебраическими выражениями.

**Список используемой литературы.**
Литературные источники приводятся в следующем порядке: по алфавиту фамилии и инициалы авторов, точное название, место издания, издательство, год издания.

**После выполнения** контрольная работа сдается в методический кабинет, где регистрируется в журнале контрольных работ.
Далее преподаватель ее проверяет.
Студент должен ознакомиться с результатами проверки работы. Если работа не зачтена, то контрольная работа забирается студентом на доработку и, после устранения недостатков, вновь регистрируется и сдается в методический кабинет.

**Номер варианта выбирается по последней цифре зачетной книжки.**

| *ЦИФРА* | *ВАРИАНТ* | *ЦИФРА* | *ВАРИАНТ* |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 вариант | 6 | 6 вариант |
| 2 | 2 вариант | 7 | 7 вариант |
| 3 | 3 вариант | 8 | 8 вариант |
| 4 | 4 вариант | 9 | 9 вариант |
| 5 | 5 вариант | 0 | 10 вариант |

Номера задач каждого варианта приведены в таблице:

| ***Вариант*** | ***Номера заданий*** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***1*** | 1 | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 | 71 | 81 |
| ***2*** | 2 | 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | 62 | 72 | 82 |
| ***3*** | 3 | 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 | 73 | 83 |
| ***4*** | 4 | 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 | 74 | 84 |
| ***5*** | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 | 85 |
| ***6*** | 6 | 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 | 76 | 86 |
| ***7*** | 7 | 17 | 27 | 37 | 47 | 57 | 67 | 77 | 87 |
| ***8*** | 8 | 18 | 28 | 38 | 48 | 58 | 68 | 78 | 88 |
| ***9*** | 9 | 19 | 29 | 39 | 49 | 59 | 69 | 79 | 89 |
| ***10*** | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |

**Вопросы для самостоятельного изучения:**

1. Определение предела. Теоремы о вычислении пределов.
2. Правила вычисления пределов. I замечательный предел.
3. Избавление от неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.
4. Производная. Формулы дифференцирования.
5. Правила дифференцирования.
6. Дифференцирование сложной функции.
7. Производные I и II порядков, их приложение.
8. Схема исследования функции с помощью производной.
9. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
10. Формулы интегрирования.
11. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменной.
12. Площадь криволинейной трапеции.
13. Дифференциальное уравнение. Определение. Общее и частное решение.
14. Однородное дифференциальное уравнение I порядка.
15. Линейное однородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами.
16. Случайная величина. Закон распределения случайной величины.
17. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

## РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

***Упражнение 1.*** Найти указанные пределы.

Решение:

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+5}{2x^2+x-1}=\frac{2^2-6*2+5}{2*2^2+2-1}=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}$$

2) $$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\frac{2*3^2-3*3-9}{3^2-3-6}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

При подстановке вместо переменно *x* ее предельного значения 3 получается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для избавления от этого типа неопределенности в этом случае представим квадратные трехчлены числителя и знаменателя в виде произведения линейных множителей, воспользовавшись известной формулой $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_1, x_2$ - корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$. У нас $2x^2-3x-9=2(x-3)(x+\frac{3}{2})$, т.к. дискриминант квадратного трехчлена $D=9-4*2*(-9)=81$, а следовательно, $x_1=3, x_2=-\frac{3}{2}$.

Аналогично $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$.

Теперь условие примера можно переписать а другом виде и продолжить решение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+\frac{3}{2})}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2*3+3}{3+2}=\frac{9}{5}.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$

Здесь сталкиваемся с неопределенностью вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{2}{3}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{tg^2 4x}$.

В данном случае для освобождения от возникшей неопределенности вида будем использовать I замечательный предел и одно из его очевидных следствий:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\_\lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=1.$$

Решение примера будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{tg^2 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{tg4x*tg4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}*\frac{4x}{tg4x}*\frac{\sin 2x}{2x}*\frac{4x}{tg4x}*\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

***Упражнение 2.*** Найти производные, пользуясь правилами и формулами дифференцирования.

Решение:

Кроме формул дифференцирования нужно использовать правила дифференцирования (суммы, разности, произведения, частного).

Необходима и теорема о производной сложной функции:

если задана сложная функция $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то есть $y=f(\varphi(x))$; если каждая из функций $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ дифференцируема по своему аргументу, то

$$y'=y'_u*u'_x.$$

1) $y=(2x^5-3\sqrt{x^3}+1)^6=u^6$, $u=2x^5-3\sqrt{x^3}+1$,

$$y' = 6u^5u' = 6(2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} + 1)^5(2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} + 1)' =$$

$$= 6(2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} + 1)^5(10x^4 - \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}) = 6(2x^5 - 3\sqrt{x^3} + 1)^5(10x^4 - \frac{9}{2}\sqrt{x}).$$

2) $y = \dfrac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$,

$$y' = \frac{(\cos 7x)' * \sqrt{1-3x^4} - \cos 7x(\sqrt{1-3x^4})'}{(\sqrt{1-3x^4})^2} =$$

$$= \frac{-\sin 7x * (7x)'\sqrt{1-3x^4} - \cos 7x \dfrac{1}{2\sqrt{1-3x^4}}(1-3x^4)'}{1-3x^4} =$$

$$= \frac{-7\sin 7x\sqrt{1-3x^4} - \dfrac{\cos 7x1}{2\sqrt{1-3x^4}}(-12x^3)}{1-3x^4} = \frac{-7\sin 7x(1-3x^4) + 6x^3\cos 7x}{(1-3x^4)\sqrt{1-3x^4}}$$

3) $y = 3^{tgx}\sin 5x$

$$y = (3^{tgx})'\sin 5x + 3^{tgx}(\sin 5x)' = 3^{tgx}\ln 3\frac{1}{\cos^2 x}\sin 5x + 5 * 3^{tgx}\cos 5x$$

4) $y = \ln\arcsin 6x$

$$y' = \frac{1}{\arcsin 6x}(\arcsin 6x)' = \frac{1}{\arcsin 6x} * \frac{1}{\sqrt{1-(6x)^2}}(6x)' = \frac{1}{\arcsin 6x} * \frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}$$

***Упражнение 3.*** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и начертить график. Исследование функции и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции D(y);
2) найти точки экстремума функции и определить интервалы ее монотонности;
3) найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;
4) найти асимптоты графика функции;
5) построить график, используя результаты предыдущих исследований;
6) дополнительно найти наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[\alpha;\beta]$.

<u>Решение:</u>

Дана функция: $y = \frac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9; \_\alpha = -3; \_\beta = 0$

1) Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента *x*, то есть D(y): $x \in (-\infty;+\infty)$, а это значит, что функция непрерывна на всей числовой прямой и график ее не имеет вертикальных асимптот.
2) Исследуем функцию на экстремум и интервалы монотонности. С этой целью найдем ее производную и приравняем к нулю:

$$y' = (\frac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9))' = \frac{1}{4}(3x^2 + 18x + 15)$$

$$\frac{1}{4}(3x^2 + 18x + 15) = 0$$

$3x^2+18x+15=0$

Решая полученное квадратное уравнение, делаем вывод о том, что функция имеет две критические точки I рода $x_1$ = -5, $x_2$ = -1. Разбиваем область определения этими точками на части и по изменению знака производной в них выявляем промежутки монотонности и наличие экстремума:

| x | $(-\infty;-5)$ | -5 | $(-5;-1)$ | -1 | $(-1;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | max | ↘ | min | ↗ |

$$y_{\max}=y(-5)=\frac{1}{4}\left[(-5)^3+9(-5)^2+15(-5)-9\right]=4$$

$$y_{\min}=y(-1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^3+9(-1)^2+15(-1)-9\right]=-4$$

3) Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдем II производную заданной функции и приравняем ее к нулю:

$$y''=(y')'=(\frac{1}{4}(3x^2+18x+15))'=\frac{1}{4}(6x+18)$$

$$y''=0\text{, т.е. }\frac{1}{4}(6x+18)=0$$

$$6x+18=0$$
$$x+3=0$$
$$x=-3$$

Итак, функция имеет одну критическую точку 2 рода $x=-3$. Разобьем область определения полученной точкой на части, в каждой из которой установим знак II производной:

| x | $(-\infty;-3)$ | -3 | $(-3;+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $\cap$ | т.п. | $\cup$ |

Значение $x=-3$ является абсциссой точки перегиба графика функции, а ордината этой точки $y(-3)=\frac{1}{4}\left[(-3)^3+9(-3)^2+15(-3)-9\right]=0$

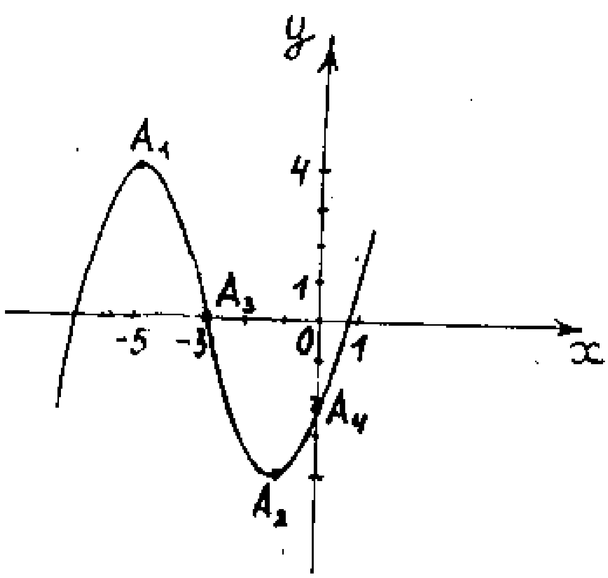
4) Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения параметров уравнения асимптоты $y=kx+b$ воспользуемся формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\_b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Имеем $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}(x^3+9x^2+15x-9)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{4}(x^2+9x+15-\frac{9}{x})=\infty$.

Таким образом, у графика заданной функции наклонных асимптот нет.

5) Для построения графика в выбранной системе координат изобразим точки максимума $A_1$(-5; 4), минимума $A_2$(-1; -4), перегиба $A_3$ (-3; 0) и точку пересечения графика с осью *Oy* $A_4$ (0; $-\frac{9}{4}$). С учетом результатов предыдущих исследований построим кривую.




6) Найдем наибольшее и наименьшее значения заданной функции на отрезке $[-3;0]$. Для этого посчитаем значения функции на концах

этого отрезка, в критических точках I рода, попавших на отрезок, и сравним результаты:

$$y(-3)=0;\_\ y(-1)=-4;\_\ y(0)=-\frac{9}{4}.$$

Очевидно, что $\min\limits_{[-3;0]} f(x)=-4;\_\ \max\limits_{[-3;0]} f(x)=0$.

***Упражнение 4.*** Задан закон *s(t)* изменения пути движения материальной точки; нужно найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени $t_0$.

<u>Решение:</u>

Пусть $s(t)=3t^4-2t^3+t-1;\_\ t_0=2$.

Известно, что значения скорости и ускорения материальной точки в некоторый момент времени являются соответственно значениями в этот момент I и II производных функции, задающей закон изменения пути движения точки.

У нас $v=s'(t)=(3t^4-2t^3+t-1)'=12t^3-6t^2+1$

$v(2)=12*2^3-6*2^2+1=73$ (ед. ск.)

$a=v'=s''(t)=(12t^3-6t^2+1)'=36t^2-12t$

$a(2)=36*2^2-12*2=120$ (ед. уск.)

***Упражнение 5.*** Найти неопределенные интегралы

а) способом подстановки (методом замена переменной) $\int(\ln x)^8\frac{dx}{x}$, $\int e^{2x^3+3}x^2dx$;

б) применяя метод интегрирования по частям $\int(2x+8)\cos 7x dx$, $\int arctg 3x dx$.

<u>Решение:</u>

а) <u>$\int(\ln x)^8\frac{dx}{x}$</u>: применим подстановку $t=\ln x$. Тогда $dt=(\ln x)'dx=\frac{dx}{x}$ и

$$\int(\ln x)^8\frac{dx}{x}=\int t^8dt=\frac{1}{9}t^9+C=\frac{1}{9}(\ln x)^9+C$$

<u>$\int e^{2x^3+3}x^2dx$</u>: применим подстановку $t=2x^3+3$. Тогда $dt=(2x^3+3)'dx=6x^2dx$,

$\frac{1}{6}dt=x^2dx$, откуда $\int e^{2x^3+3}x^2dx=\int e^t\frac{1}{6}dt=\frac{1}{6}e^t+C=\frac{1}{6}e^{2x^3+3}+C$

б) <u>$\int(2x+8)\cos 7x dx$</u>: применим формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$.

Положим $u=2x+8,\_\ dv=\cos 7x$. Тогда $du=2dx,\_\ v=\int\cos 7x dx=\frac{1}{7}\sin 7x$.

Следовательно,

$$\int(2x+8)\cos 7x dx=\frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x-\frac{2}{7}\int\sin 7x dx=\frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x+\frac{2}{49}\cos 7x+C.$$

<u>$\int arctg 3x dx$</u>: положим $u=arctg 3x,\_\ dv=dx$. Тогда $du=\frac{3}{1+9x^2}dx,\_\ v=\int dx=x$.

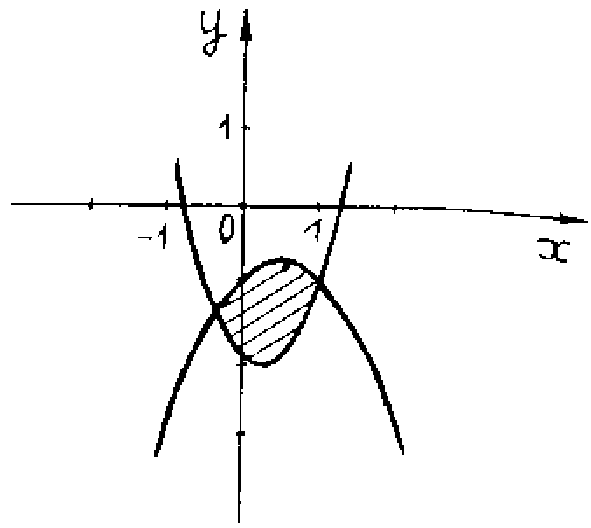
Отсюда $\int arctg3xdx = xarctg3x - 3\int \frac{xdx}{1+9x^2}$. Применяя в последнем интеграле подстановку $t = 1+9x^2$, получаем $dt = 18xdx$, следовательно, $3\int \frac{xdx}{1+9x^2} = \frac{3}{18}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{18}\ln|t| + C = \frac{3}{18}\ln(1+9x^2) + C$.

Отсюда $\int arctg3xdx = xarctg3x - \frac{3}{18}\ln(1+9x^2) + C$.

***Упражнение 6****.* Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченную параболами.

$$y_1 = 2x^2 - x - 2;\ \_\ y_2 = -x^2 + x - 1$$

Решение:




Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений: $2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1$.

Решаем полученное квадратное уравнение: $3x^2 - 2x - 1 = 0,\ \_\ D = 4 + 4*3 = 16$

$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1,\ \_\ x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$.

Вычисление площади фигуры осуществляем по формуле $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$, где $f_1(x), f_2(x)$ - кривые, ограничивающие фигуру $(f_2(x) \ge f_1(x))$.

В нашем случае

$$S = \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1} [(-x^2 + x - 1) - (2x^2 - x - 2)]dx = \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1} [-3x^2 + 2x + 1]dx = \left(-3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \frac{34}{27} \text{ (кв. ед.)}$$

***Упражнение 7.*** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Решение:

Правая часть уравнения $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ обладает свойством $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = f(x,y)$. Поэтому заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением I порядка. Совершим замену $u = \frac{y}{x}$, где $u$ - некоторая функция от аргумента *x*. Отсюда $y = ux,\ \_\ y' = u'x + u$. Исходное уравнение приобретает вид $u'x + u\frac{2x*ux}{x^2 - u^2x^2} = \frac{2u}{1-u^2}$.

Продолжаем преобразования: $u'x = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{2u - u^3}{1-u^2} = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}$; $\frac{du}{dx}x = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}$.

Производим разделение переменных: $\dfrac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)}=\dfrac{dx}{x}$.

После интегрирования обеих частей уравнения получаем

$$\int\frac{1+u^2-2u^2}{u(1+u^2)}du=\int\frac{du}{u}-\int\frac{2u^2du}{u(1+u^2)}=\ln u-\int\frac{2u}{1+u^2}du=\ln u-\ln(1+u^2)+\ln C;$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x.$$

Таким образом $\ln u-\ln(1+u^2)+\ln C=\ln x$; $\ln\left[C\dfrac{u}{1+u^2}\right]=\ln x$.

Потенцируя, находим $C\dfrac{u}{1+u^2}=x$ или $C\dfrac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x^2}^2}=x$; $\dfrac{Cxy}{x^2+y^2}=x$.

Итак, общий интеграл исходного уравнения приобретает вид

$Cy=x^2+y^2$, где $C$ – произвольная постоянная.

***Упражнение 8.*** Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения II порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y''-6y'+8y=0,\_\ y(0)=1,\_\ y'(0)=2$

б) $y''-8y'+16y=0,\_\ y(0)=2,\_\ y'(0)=5$

в) $y''-4y'+13y=0,\_\ y(\pi)=0,\_\ y'(\pi)=1$

Решение:

а) Для заданного дифференциального уравнения $y''-6y'+8y=0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2-6k+8=0$ по принципу: $y''=k^2,\_\ y'=k^1=k,\_\ y=k^0=1$. Решаем полученное квадратное уравнение и получаем два вещественных разных корня $k_1=2,\_\ k_2=4$.

Т.к. $k_1\neq k_2$, то общее решение данных уравнений записывается в виде $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$. В нашем случае $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$, где $C_1,\_\ C_2$ - произвольные постоянные.

Отсюда $y'(x)=(C_1e^{2x}+C_2e^{4x})'$, $y'(x)=2C_1e^{2x}+4C_2e^{4x}$.

Используя начальные условия $y(0)=1$: $C_1e^{2*0}+C_2e^{4*0}=1$, т.е. $C_1+C_2=1$.

Из того что $y'(0)=2$ следует $2C_1e^{2*0}+4C_2e^{4*0}=2$, т.е. $2C_1+4C_2=2$, $C_1+2C_2=1$.

Решая систему уравнений $\begin{cases}C_1+C_2=1\\C_1+2C_2=1\end{cases}$, получаем $C_1=1,\_\ C_2=0$.

Теперь в наше общее решение $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ подставим найденные значения $C_1=1,\_\ C_2=0$. Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, приобретает вид $y=e^{2x}$.

б) Для заданного дифференциального уравнения $y''-8y'+16y=0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2-8k+16=0$ по принципу: $y''=k^2,\_\ y'=k^1=k,\_\ y=k^0=1$. Решаем полученное квадратное уравнение и получаем два равных вещественных корня $k_1=k_2=4$.

Т.к. $k_1 = k_2$, то общее решение данных уравнений записывается в виде $y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$. В нашем случае $y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$, где $C_1, C_2$ - произвольные постоянные.

Отсюда $y'(x) = (C_1e^{4x} + C_2xe^{4x})'$, $y'(x) = 4C_1e^{4x} + C_2e^{4x} + 4C_2xe^{4x}$.

Учитывая начальные условия, получаем систему уравнений для определения $C_1, C_2$: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 4C_1 + C_2 = 5 \end{cases}$. Решая систему, получаем $C_1 = 1, C_2 = 1$.

Искомое частное решение имеет вид: $y = e^{4x} + xe^{4x} = e^{4x}(x+1)$

в) Для заданного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$. Решая это уравнение, убеждаем, что оно не имеет вещественных корней.

В этом случае общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде $y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, ($p, q$ - коэффициенты характеристического уравнения).

У нас $\alpha = 2, \beta = 3$ поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x$.

Отсюда $y'(x) = (C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x)' =$
$= 2C_1e^{2x}\cos 3x - 3C_1e^{2x}\sin 3x + 2C_2e^{2x}\sin 3x + 3C_2e^{2x}\cos 3x$.

Таким образом, для определения значений $C_1, C_2$ исходя из начальных условий, получаем систему уравнений $\begin{cases} C_1e^{2\pi} = 0 \\ 2C_1e^{2\pi} - 3C_2e^{2\pi} = 1 \end{cases}$,

решая которую имеем $C_1 = 0, C_2 = -\frac{1}{3}e^{-2\pi}$.

Итак, искомое частное решение приобретает вид

$$y = -\frac{1}{3}e^{-2\pi}e^{2x}\sin 3x = -\frac{1}{3}e^{2(x-\pi)}\sin 3x$$

***Упражнение 9.*** Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения $x_1$ и $x_2$, причем $x_1 < x_2$. Найти закон распределения величины X, если известно, что математическое ожидание M (x) = 1,4, дисперсия D (x) = 0,24 и вероятность $p_1$ того, что X примет значение $x_1$, равна 0,6.

Решение:

Так как сумма вероятностей всех возможных значений X равна 1, то вероятность $p_2$ того, что X примет значение $x_2$, равна $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,6 = 0,4$.

Напишем закон распределения X:

| X | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| p | 0,6 | 0,4 |

Для отыскания $x_1$ и $x_2$ составим два уравнения.

Для составления первого уравнения воспользуемся тем, что математическое ожидание M(x) определяется по формуле $M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$

В нашем случае: $M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2$

Учитывая, что по условию M(x) = 1,4, можем записать первое уравнение:

$$0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4.$$

Учитывая, что по условию D(x) = 0,24, пользуясь формулой $D(x) = M(X^2) - [M(X)]^2$, напишем второе уравнение:

$$0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 - 1,4^2 = 0,24, \text{ или}$$

$$0{,}6\,x_1^2 + 0{,}4\,x_2^2 = 2{,}2.$$

Решив полученную систему уравнений, найдем два решения:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ и } x_1 = 1{,}8,\ x_2 = 0{,}8.$$

По условию, $x_1 < x_2$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение.

Окончательно получим искомый закон распределения:

| | | |
|---|---|---|
| X | 1 | 2 |
| p | 0,6 | 0,4 |

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

**В задачах 1-10 найти указанные пределы:**

№ 1.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 3x}$

№ 2.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}$; а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x\cos 3x}$

№ 3.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2+3x+2}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg3x}{\sin^2 2x}$

№ 4.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x+2}{14-x-3x^2}$; а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x * tg3x}{x^2}$

№ 5.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+5}$; а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg2x}$

№ 6.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-5x+1}{3x-x^2-2}$; а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cos 5x}{\sin 3x}$

№ 7.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$; а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x * tg4x}{\sin^2 6x}$

№ 8.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-7x+6}{6-x-x^2}$; а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x * tg4x}{x^2}$

№ 9.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$; а) $x_0$ = - 2; б) $x_0$ = - 1; в) $x_0=\infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{tg5x}$

№ 10.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+x-4}{4x-x^2-3}$; а) $x_0$ = - 1; б) $x_0$ = 1; в) $x_0=\infty$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cos 7x}{\sin 2x}$

**В задачах 11-20 найти производные, пользуясь правилами и формулами дифференцирования:**

№ 11.

а). $y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4$

б). $y=\dfrac{4x+7tgx}{\sqrt{1+9x^2}}$

в). $y=\cos 3x * e^{\sin x}$

г). $y=\ln arctg2x$

№ 12.

а). $y=(3x^3-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$

б). $y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$

в). $y=2^{3x}tg2x$

г). $y=\cos\ln 5x$

№ 13.

а). $y=(x^2-\dfrac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4$

б). $y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$

в). $y=e^{tgx}\ln 2x$

г). $y=\cos\sqrt{x^2+3}$

№ 14.

а). $y=(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$

б). $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$

в). $y=2^{8x}tg3x$

г). $y=\arcsin\ln 4x$

№ 15.

а). $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$

б). $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+tgx}$

в). $y=e^{ctgx}*\sin 4x$

г). $y=\sin\ln 5x$

№ 16.

а). $y=(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5)^2$

б). $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$

в). $y=3^{tgx}\arcsin(x^2)$

г). $y=\ln\sin 6x$

№ 17.

а). $y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3$

б). $y=\dfrac{arctg7x}{2-9x^2}$

в). $y=e^{ctgx}\cos 6x$

г). $y=\sin\ln 2x$

№ 18.

а). $y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4$

б). $y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$

в). $y=4^{\cos z}arctg2x$

г). $y=\ln\cos 5x$

№ 19.

а). $y=(3x^5-\dfrac{5}{x^3}-2)^5$

б). $y=\dfrac{\cos 6x}{\sin 3x}$

в). $y=e^{x^3}tg7x$

г). $y = \arcsin \ln 2x$

№ 20.

а). $y = (x^4 + 2\sqrt[3]{x} + 1)^2$

б). $y = \dfrac{\sqrt{3 - 5x^3}}{e^x - ctgx}$

в). $y = 2^{\sin x} \arcsin 2x$

г). $y = \ln \cos 7x$

**В задачах 21-30 исследовать функцию методами дифференциального исчисления и начертить график:**

№ 21

$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x; \_\alpha = -1; \_\beta = 3$

№ 22

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1; \_\alpha = -1; \_\beta = 2$

№ 23

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10; \_\alpha = 2; \_\beta = 4$

№ 24

$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10; \_\alpha = -1; \_\beta = 2$

№ 25

$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2; \_\alpha = 0; \_\beta = 4$

№ 26

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5; \_\alpha = -2; \_\beta = 3$

№ 27

$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x; \_\alpha = -1; \_\beta = 3$

№ 28

$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7; \_\alpha = -3; \_\beta = 1$

№ 29

$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32; \_\alpha = 1; \_\beta = 4$

№ 30

$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20; \_\alpha = -1; \_\beta = 4$

**В задачах 31-40 задан закон *s(t)* изменения пути движения материальной точки; нужно найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени $t_0$:**

№ 31

$s(t) = 2t^4 - 3t^2 + t - 2; \_t_0 = 2$

№ 32

$s(t) = 3t^4 - 2t^2 - t + 1; \_t_0 = 1$

№ 33

$s(t) = 4t^4 - 3t^2 - 2t - 1; \_t_0 = 2$

№ 34

$s(t) = t^4 + t^2 - 3t + 1; \_t_0 = 1$

№ 35

$s(t) = 2t^4 - 2t^2 + t - 2; \_t_0 = 2$

№36

$s(t) = 3t^4 - t^2 + 2t + 1; \_t_0 = 1$

№ 37

$s(t) = 4t^4 - 3t^2 - t + 2; \_t_0 = 2$

№ 38

$s(t) = 2t^4 + 4t^2 - 5t - 1; \_t_0 = 1$

№ 39

$s(t) = 3t^4 + t^2 - 2t + 1; \_t_0 = 2$

№ 40

$s(t) = 4t^4 + 2t^2 - 7t - 3; \_t_0 = 1$

**В задачах 41-50 найти неопределенные интегралы**
**а) способом подстановки (методом замены переменной),**
**б) применяя метод интегрирования по частям:**

№ 41

а) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

б) $\int \ln x dx$

№ 42

а) $\int (\ln x)^3 \dfrac{dx}{x}$

б) $\int (2x+1)\sin 3x dx$

№ 43

а) $\int \dfrac{arctgx}{1+x^2}dx$

б) $\int (x-1)e^{2x}dx$

№ 44

а) $\int \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$

б) $\int x\cos 2x dx$

№ 45

а) $\int e^{-x^2}xdx$

б) $\int arctg 2x dx$

а) $\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

б) $\int x^3 \ln x dx$

№ 47

а) $\int \dfrac{x^2}{2x^3+3}dx$

б) $\int (3x+7)\cos 5x dx$

№ 48

а) $\int \sqrt{5x^4+3}x^3 dx$

б) $\int (12x+2)\sin 3x dx$

№ 49

а) $\int x^2 e^{x^3+1}dx$

б) $\int \sqrt[3]{x}\ln 2x dx$

№ 50

а) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{8x^4-1}}dx$

б) $\int x\sin 8x dx$

№ 46

**В задачах 51-60 вычислить площадь плоской фигуры, ограниченную параболами:**

№ 51

$$y_1=\frac{1}{2}x^2-x+1;\_\ y_2=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$$

№ 52

$$y_1=\frac{1}{2}x^2+x+2;\_\ y_2=-\frac{1}{2}x^2-5x+9$$

№ 53

$$y_1=\frac{1}{3}x^2-3x+2;\_\ y_2=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$$

№ 54

$$y_1=2x^2+6x-3;\_\ y_2=-x^2+x+5$$

№ 55

$$y_1=3x^2-5x-1;\_\ y_2=-x^2+2x+1$$

№ 56

$$y_1=2x^2-6x+1;\_\ y_2=-x^2+x-1$$

№ 57

$$y_1=\frac{1}{3}x^2-2x+4;\_\ y_2=-\frac{2}{3}x^2-x+6$$

№ 58

$$y_1 = x^2 - 5x - 3;\_\ y_2 = -3x^2 + 2x - 1$$

№ 59

$$y_1 = x^2 - 2x - 5;\_\ y_2 = -x^2 - x + 1$$

№ 60

$$y_1 = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5;\_\ y_2 = -\frac{3}{4}x^2 - x + 1$$

**В задачах 61-70 найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка:**

№ 61

$$y' = \frac{x + 8y}{8x + y}$$

№ 62

$$xyy' = x^2 + y^2$$

№ 63

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

№ 64

$$xy' + xtg\frac{y}{x} = y$$

№ 65

$$xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$$

№ 66

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$$

№ 67

$$xyy' = x^2 - y^2$$

№ 68

$$(x - y)y' = 2x + y$$

№ 69

$$xy' + y\ln^2\frac{y}{x} = 0$$

№ 70

$$xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$$

**В задачах 71-80 найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения II порядка с постоянными коэффициентами:**

№ 71

$$y'' - 7y' + 10y = 0,\_\ y(0) = 2,\_\ y'(0) = -1$$

№ 72

$$y'' + 2y' + 10y = 0,\_\ y(\frac{\pi}{2}) = 0,\_\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1$$

№ 73

$$y'' - 6y' + 9y = 0,\_\ y(0) = 1,\_\ y'(0) = 0$$

№ 74

$$y'' + 8y' + 7y = 0,\_\ y(0) = 2,\_\ y'(0) = 1$$

№ 75

$$y'' + 9y = 0,\_\ y(\pi) = 0,\_\ y'(\pi) = 1$$

№ 76

$$y'' - 7y' + 12y = 0,\_\ y(0) = 2,\_\ y'(0) = -2$$

№ 77

$$y'' + 9y' = 0,\_\ y(0) = 1,\_\ y'(0) = -3$$

№ 78

$$y'' - 3y' + 2y = 0,\_\ y(0) = 0,\_\ y'(0) = 1$$

№ 79

$$y'' - 5y' + 6y = 0,\_\ y(0) = 5,\_\ y'(0) = 0$$

№ 80

$$y'' - 2y' + 5y = 0,\_\ y(0) = -1,\_\ y'(0) = 0$$

**В задачах 81-90 найти закон распределения дискретной случайной величины, если известно, что: дискретная случайная величина X может принимать только два значения $x_1$ и $x_2$ , причем $x_1 < x_2$; известна вероятность $p_1$ возможного значения $x_1$, математическое ожидание M (x) и дисперсия D (x):**

№ 81
$p_1 = 0{,}1$; $M(x) = 3{,}9$; $D(x) = 0{,}09$;

№ 82
$p_1 = 0{,}3$; $M(x) = 3{,}7$; $D(x) = 0{,}21$;

№ 83
$p_1 = 0{,}5$; $M(x) = 3{,}5$; $D(x) = 0{,}25$;

№ 84
$p_1 = 0{,}7$; $M(x) = 3{,}3$; $D(x) = 0{,}21$;

№ 85
$p_1 = 0{,}9$; $M(x) = 3{,}1$; $D(x) = 0{,}09$;

№ 86
$p_1 = 0{,}9$; $M(x) = 2{,}2$; $D(x) = 0{,}36$;

№ 87
$p_1 = 0{,}8$; $M(x) = 3{,}2$; $D(x) = 0{,}16$;

№ 88
$p_1 = 0{,}6$; $M(x) = 3{,}4$; $D(x) = 0{,}24$;

№ 89
$p_1 = 0{,}4$; $M(x) = 3{,}6$; $D(x) = 0{,}24$;

№ 90
$p_1 = 0{,}2$; $M(x) = 3{,}8$; $D(x) = 0{,}16$.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА


3. **Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2017. — 401 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/matematika-449006#page/24**

4. Математика для экономистов : учебник для среднего профессионального образования / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под редакцией А. М. Попова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2017. — 566 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/matematika-dlya-ekonomistov-430973#page/282

5. Теория вероятностей : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 203 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/teoriya-veroyatnostey-451178#page/1

6. Дискретная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. Б. Гисин. — Москва : Издательство Юрайт, 2017. — 383 с. Режим доступа: https://urait.ru/viewer/matematika-praktikum-449059#page/1

Вопросы для подготовки к дифференцированному зачёту по дисциплине ЕН.01 МАТЕМАТИКА

1. Определение производной. Правила дифференцирования.

2. Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

3. Геометрический и физический смысл производной.

4. Комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

5. Производная сложной функции.

6. Действия с комплексными числами в алгебраической форме.

7. Производные высших степеней.

8. Решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел на примере уравнения.

9. Первообразная функции. Основное свойство первообразной.

10. Модуль комплексного числа. Сложение и вычитание комплексных чисел в геометрической форме.

11. Неопределенный интеграл. Правила интегрирования.

12. Определенный интеграл. Формула Ньютона –

Лейбница. 13 Свойства определенного интеграла.

14 Матрица. Виды матриц. Транспонирование матрицы. Обратная матрица.

15. Площадь криволинейной трапеции.

16. Действия над матрицами.

17. Квадратная матрица. Определитель матрицы.

18. Уравнение касательной к графику функции в данной точке. Пример: записать уравнение касательной к графику функции $f(x)$ ⍰ $x^3$ ⍰1 в точке с абсциссой $x_0$ | | | |1, $x_0$ | | 2.

19. Методы решения системы линейных уравнений.

20. Применение производной для решения задач.

21. Формулы Крамера для решения системы уравнений.

22. Применение производной для определения промежутков монотонности функции.

23. Метод Гаусса для решения системы линейных уравнений.

24. Применение производной для определения точек экстремума функции.

25. Различные формы комплексных чисел.

26. Полное исследование функции с помощью

производной на примере функции $y = x^3/(x^2-1)$ .

29. Правило нахождения производной

сложной функции на примере: а) $y = \sin 2x^3$;

б) $y = (8x^3 - 7x^2 + 6x - 4)^4$.

30. Нахождение производных высших степеней на примере функции: $y = x \ln x$.

31. Условие монотонности функции.

32. Нахождение определенного интеграла на примере: $\int_1^2 (3x^2 + 4x + 5)dx$

33. Необходимое и достаточное условие экстремума функции.

34. Вычисление определителя матрицы 2х2 и 3х3.

35. Универсальный способ вычисления определителя матриц.

36. Методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод замены переменной (метод подстановки); метод интегрирования по частям.

37. Производная суммы, произведения и частного функции.

38. Правила нахождения площади фи гуры,

ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2$

$(x)$. Пример.

39. Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

40. Правила дифференцирования на примерах.

41. Геометрический и физический смысл производной.

42. Комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

43. Производная сложной функции.

44. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

45. Производная высших степеней.

46. Решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел на примере уравнения $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7z = 0$.

47. Первообразная функции. Основное свойство первообразной.

48. Модуль комплексного числа. Сложение и вычитание комплексных чисел в геометрической форме.

49. Неопределенный интеграл. Правила интегрирования.

50. Расчет вероятности случайного события. Привести примеры.